

KOKOS

24.ročník * 1.leták

Milý řešiteli!

Prázdniny utekly jako voda a je pro Tebe nachystán nový ročník KOperníkova KOrespondenčního Semináře – KoKoSu. Jako obvykle Ti přinášíme sadu matematických oříšků doprovázenou napínavým příběhem a matematickým Pirohem, který ti napoví při řešení různých úloh. Navíc Ti hned v této sérii nabídneme, jako odměnu za Tvou snahu, účast na našich KoKoSových Prázdninách (podrobnosti nalezněš na zadní stránce). Pokud budeš v našem semináři opravdu úspěšný a dosáhneš ve výsledkové listině na medailová místa, dostaneš navíc na konci školního roku pěkné ceny, a to už stojí za to! Chceš poměřit své síly se svými vrstevníky z celé republiky? Směle do toho! Nejdříve Ti ale doporučujeme přečíst si pravidla našeho semináře, kterými se každý správný KoKoSák za každých okolností řídí:

- KoKoS je celonárodní matematická korespondenční soutěž pro žáky 6. – 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
- Ročník je rozdělen do pěti sérií. V každé sérii Ti zašleme leták se zadáním úloh. Ty je vyřešíš a pošleš nám je zpět. My je opravíme, ohodnotíme a zašleme Ti je zase nazpátek spolu se zadáním další série.
- Řešení nám můžeš posílat poštou, nebo přes internet. Poté, co se zaregistruješ do semináře, od nás e-mailem obdržíš přihlašovací údaje ke svému účtu. Pomocí těch se přihlíšíš na **kokos.gmk.cz/login** a jednoduše nám svá řešení pošleš.
- Na řešení máš vždy několik týdnů. Toto je první série, jejíž uzávěrka je **17. října**. Rádi bychom Ti dali více času, ale KOPR spěchá.
- Jednotlivé příklady piš na papíry formátu A4 nebo A5. **Na každý papír piš řešení pouze jednoho příkladu!** Více příkladů na jednom papíru nám přidává práci a vzhledem k počtu řešitelů se takovými řešeními nemůžeme a nebudeme zabývat!

- U každé úlohy připiš **do levého horního rohu** své jméno, příjmení, **číslo série a úlohy** a navíc i adresu k Tobě do školy nebo domů – podle toho, kam si necháváš zasílat opravená řešení.
- U každého příkladu musíš pečlivě vylíčit postup řešení. Uvedeš-li pouze výsledek nebo nezdůvodníš-li dostatečně své závěry, nemusíme Tvé řešení považovat za kompletní a úplné – zbytečně poté ztrácíš body!
- V zadání příkladu vždy nalezneš maximální počet bodů, který za něj můžeš získat. Pokud příklad nedokážeš vyřešit úplně, ale uděláš alespoň nějaký pokrok, přisoudíme Ti odpovídající část bodů. Maximální bodový zisk za jednu sérii je vždy 40 bodů.
- Do našeho semináře se můžeš přihlásit kdykoliv, i v průběhu roku. Také nemusíš nutně odeslat všechny série nebo úlohy (i když poté Tě asi ve výsledkové listině předběhnou usilovnější řešitelé). Vždy ale musíš před prvním odesláním řešení (tedy pokud KoKoS řešíš poprvé) **vyplnit internetovou přihlášku!** Tu najdeš na adrese <http://kokos.gmk.cz/prihlaska>. Pokud už jsi vyplnil přihlášku v minulých ročnících, nemusíš to dělat znovu. Řešeními, která odešleš, aniž by ses řádně přihlásil, se nezabýváme.
- Vyplatí se pravidelně sledovat naše webové stránky <http://kokos.gmk.cz>. Najdeš zde aktuální informace o průběhu soutěže a také diskusní fórum, které můžeš použít, nebudeš-li úloze rozumět apod. Pokud se v zadání některého příkladu objeví chyba, zveřejňujeme opravy právě na těchto stránkách.
- Pokud Vás bude z jedné školy více řešitelů, bylo by pro Vás i pro nás vhodné, abyste svá řešení posílali jednotně prostřednictvím školy, tzn. v jedné obálce. My Vám poté zašleme opravené úlohy zase zpátky v jedné obálce. Toto není závazná podmínka, ale šetříte sobě i nám práci i peníze. Děkujeme!
- Každý ročník (6. – 9.) má svou vlastní výsledkovou listinu, aby nižší ročníky nebyly znevýhodněny.
- Úspěšným řešitelem KoKoSu se stává ten, kdo získá za celý ročník 81 bodů a více. A nebo bude úspěšně řešit tři série – což znamená, že v každé z nich obdrží plné bodové ohodnocení alespoň ve dvou příkladech.

Hodně štěstí a zábavy při řešení Ti přejí Tví organizátoři:
Bára, Jiřík, Vašek, Katka, Eli, Pája, Pěta, Michal a Tom

Zadání úloh

Chladné deštivé počasí dodávalo malým postranním uličkám nočního města záhadnou atmosféru. Každý stín působil jako monstrózní nepřítel a každé zavržání vrat či zašustění novin dávno odhozených na zem dokázalo přátele vyděsit k smrti. Nebylo to tak dávno, co odešli z tepla a bezpečí hostince, ale už se zde zdrželi příliš dlouho a nemohli si dovolit více riskovat. Když však zabočili do vedlejší ulice, uvědomili si, že jejich skrýš už není tajemstvím. Kolem se potloukala asi desítká vojáků marně hledající svou kořist.

Bylo to tak vždycky. Zdejší vojáci byli příliš krvežízniví na to, aby dokázali vydržet půl roku bez boje natož pak pět let. Většinou vydrželi pár měsíců v nečinnosti, ale nakonec to dopadlo stejně. Vyhledli si nějakou skupinu lidí, pár dní je honili a sledovali po celém městě, a po dopadení je mučili tak dlouho, dokud jejich oběti nepodlehly bolesti a úplně nepřišly o rozum. Tímto alespoň na chvíli zahnali svou touhu po krvi.

„Ani se nehněte vy zpropadení bastardi,“ uslyšeli náhle za zády. Bez jakéhokoliv zaváhání se vrhli na předpokládaný zdroj výkřiku a poté zmizeli v zákoutích města.



La-la-la Lá-lá La-la-la-la La-la... Zvonící telefon navrátil Edu do pochmurné reality toho večera a přetrhl tak vlnu napětí, kterou v něm kniha pomalu ale jistě vyvolávala. Mladého chlapce to natolik rozčílilo, že se na stále vyzvánějící telefon odmítal dokonce i podívat. Byla to pro něj ta poslední kapka zpackaného dne. Odložil tedy s náležitou úctou knihu, zachumlal se do své peřiny a s vyhlídkou na nadějnější zítřek usnul.

Úloha 1. (7 bodů): Zdál se mu podivný sen. Míchalo se v něm páté přes deváté. Honili ho vojáci a vyhrožovali mu mučením, jestli jim nepomůže s jednou úlohou. Šlo o to, že z čísel od 1 do 10 se náhodně losovala dvě čísla. Chtěli znát, jaká je pravděpodobnost, že vylosují dvě čísla taková, že jedno z nich je celočíselným násobkem druhého?

Ráno se probudil, ale ihned si přál, aby se to vůbec nestalo. Kromě toho, že už hodinu měl sedět ve školní lavici, neměl hotové ani domácí úkoly, které obvykle dělal ráno, než se vydal na cestu. Večer byl tak rozčilený, že si zapomněl na ráno nastavit budík. Rodiče chodili do práce velmi brzy a Eda se nejméně dva roky budil sám, takže se jejich mysl ani neobtěžovala s variantou, ve které jejich syn zaspí. Po chvíli přemýšlení vylezl Eda z postele s tím, že dnešní den už snad horší nebude, a vydal se směrem ke koupelně. Autobus mu jel až za hodinu, a tak šel na všechno pomalu a s rozvahou, neboť měl dostatek času i na zhotovení potřebných domácích úkolů.

Úloha 2. (7 bodů): Nebyl si jistý, jestli matiku stihne, ale pro všechny případy chtěl mít udělaný domácí úkol. Měl sestrojít trojúhelník ABC . Znal výšku na stranu b , která byla 6,5 cm, poloměr kružnice vepsané byl 2 cm a velikost úhlu, který svíraly strany b a c , byla 74° . Sestroj stejný trojúhelník jako Eda.

Po cestě v autobuse se opět ztratil v rozečtené knize, takže mu připadala nezvykle krátká oproti těm, kdy si celou dobu povídal se svými kamarády a spolužáky. O těch, kdy se učival do školy, raději ani nepřemýšlel. Do školy dorazil na poslední tři hodiny, z nichž jednu zabíral tělocvik, pak zeměpis a tu poslední fyzika. To jsem tu nemusel ani chodit, pomyslel si znechuceně Eda a vydal se hledat zbytek své třídy.

Úloha 3. (6 bodů): Procházel dlouhou chodbou, když jej upoutal podivný květináč, položený na parapetu, plný rostlin se třemi různými barvami květů. Zvědavě si jej prohlížel a zjistil, že rostlin se žlutými květy je v něm 10 a s fialovými 13. Zároveň žluté a fialové květy má dokonce 5 rostlin, avšak trojbarevná není ani jedna. Bílými a fialovými květy současně se pyšní 6 rostlin. V obdivování jej vyrušilo zvonění. Ještě si ale stihl všimnout, že všech rostlin s bílými květy je 9 a těch bez nich je 10. Urči počet rostlin s pouze bílými květy.

Celý zeměpis přečetl, po těch letech už se ani nesnažil projevovat být jen malinkatý zájem o tento předmět stejně jako většina jeho třídy a taktéž vyučující se nesnažila je něčím za každou cenu zaujmout, hlavně když byli zticha. Na konci hodiny zaregistroval slovo písemka, ale to stejně nikoho nezajímá a většina lidí to nechá na náhodu. To tělocvik byl o něčem jiném. Eda měl sport docela rád a tělák vítal jako příjemnou změnu z monotónního vysedávání v lavicích. Ovšem dnes, stejně jako včera, prostě neměl svůj den. Tělocvik nechal doma a během přestávky si žádný sehnat nedokázal. Učitel nebyl nadšený, ale protentokrát to s káravým pohledem nechal být. Hoch tedy sebral poslední zbytky optimismu, které v něm ještě zbyly, a posadil se na lavičku.



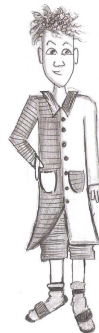
Úloha 4. (8 bodů): Uprostřed hřiště byly vyznačeny čáry – Eda v nich ihned objevil dvě soustředné kružnice k a m . V kružnici k byl vepsán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ (velmi jej překvapilo, že byl označen písmeny – na chvíli zauvažoval, jestli netrpí halucinacemi) a na kružnici m ležel bod K . Sestrojte všechny možné úsečky, jejichž krajní body leží na obvodu pětiúhelníku a bod K je jejich středem. (pro sestavení použijte hodnoty kružnice $k(S; 5\text{ cm})$ a $m(S; 2\text{ cm})$)

Po chvíli přestal hypnotizovat střed hřiště a nechal se knihou odnést do světa vzdáleného několik lidských fantazií od spolužáků hrajících basketbal. Zazvonilo zrovna ve chvíli, kdy dočetl kapitolu. Zaklapl tedy knihu, sebral si věci a vydal se k učebně fyziky. Nebyl to zrovna jeho nejoblíbenější předmět, vlastně ho ani trochu neměl rád, ale letos to byla jejich úplně první hodina a učit je měl pro všechny naprosto neznámý učitel. Tenhle rok učil na jejich škole vůbec poprvé, a tak byli všichni trochu zvědaví, jaký vlastně bude. Dorazil do třídy, a ještě než otevřel knihu a pokračoval ve čtení příběhu, si všiml, že si jeho spolužáci hrají s váhou.

Úloha 5. (5 bodů): Kluci náhodně vážili dvojice čtyř závaží s různými celočíselnými hodnotami, přičemž stejné vážení neopakovali a na váze se ocitla všechna závaží. Jedno závaží mělo modrou barvu, druhé žlutou, další zelenou a poslední červenou. Eda pozoroval, že modré závaží zvažili třikrát a že došlo ke společnému vážení žlutého a zeleného závaží. Zasluchl, že červené je určitě nejlehčí a žluté

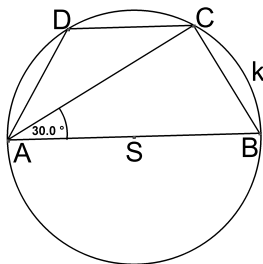
musí být třikrát těžší než zelené. Dokážeš určit, jaké jsou jednotlivé hmotnosti závaží, když chlapcům při čtyř váženích vyšly výsledky 900 g, 0,5 kg, 400 000 mg a 800 g.

A poněvadž do začátku hodiny zbývalo ještě asi sedm minut, četl a četl. I po zvonění si Eda stále četl, neboť většina učitelů chodila pozdě. Ač byl fyzikář nový, ani on tuto tradici neporušil. Dokonce by se i dalo říci, že ji až netradičně protáhl, protože k radosti celého osazenstva třídy přišel s patnáctiminutovým zpožděním. Avšak ihned poznali, že se nehodlá zdržovat zbytečnými řečmi a zdvořilostmi. Zhruba ve třech větách se představil, a než se kdokoli ve třídě stihl vzpamatovat, začal se vyptávat studentů v předních lavicích na látku z předešlých ročníků. Takto proběhlo pár otázek následovaných několika nesmyslnými i smysluplnými odpověďmi a učitel následně přesunul svou pozornost do zadních lavic. Eda však nezaregistroval ani fyzikářovo jméno, a tak se neváhal s naprosto vážnou tváří zeptat. Po vyřčené otázce, propadla, jak se ostatně dalo očekávat, celá třída smíchu a učitel mlel něco o nepozornosti, nevychovanosti a nevědomosti dnešních studentů.



A tak se stalo, že z následujících pěti minut si Eda odnesl jen to, že se fyzikář jmenuje Láda. Poté, co si učitel konečně přestal stěžovat, se opět vrátil k prověřování fyzikálních znalostí jeho nové třídy. Většina studentů vypadala po vyřčení otázky jejich směrem velice vyděšeně, a když se jim náhodou podařilo něco odpovědět, viděli v učitelových očích značné zklamání místy hraničící s touhou spáchat sebevraždu nad současným vzdělávacím systémem. Dalo by se očekávat, že všichni dávali pozor, ale to ne. Například dívka v lavici před Edou se raději věnovala matematice.

Úloha 6. (7 bodů): Měla na stole papír a na něm jednotkovou kružnici k , do které měla vepsaný lichoběžník $ABCD$ tak, že základna AB lichoběžníku byla také průměrem dané kružnice. Podle přiloženého úhlooměru šlo poznat, že velikost úhlu CAB je 30° . Urči délku ramen a výšku lichoběžníku.



Konečně přišla řada na Edu, učitel ještě říkal něco o panu Vtipném, než položil svou otázku. „Jak zní Archimédův zákon?“ pronesl rázně fyzikář Láda a z pohledu v chlapcových očích okamžitě poznal, že nemá naprosto žádné tušení, o čem to mluví. Eda se ani nesnažil něco skrývat a zřetelně pronesl: „Těžko říci.“ „To jsem si mohl myslet,“ odpověděl posměšně fyzikář. Ale hoch se nehodlal nechat ponížít tak snadno. I když toho o fyzice moc nevěděl, byl to celkem bystrý kluk a tak si nemohl nevěšmout jisté skutečnosti. Celou hodinu neslyšel od Ládi jedinou správnou odpověď, žádnou ze špatně zodpovězených otázek neopravil a z těch nezodpovězených na žádnou neodpověděl. Pouze kritizoval a tvářil se, že po celou dobu v té škole vůbec nic nedělali. Eda tedy neváhal a rychle se fyzikáře zeptal: „Jaké je tedy znění toho Archimédova zákona?“ Tohle učitel nečekal. Na malý okamžik zahlédl Eda v jeho očích překvapení z vyřčené

otázky. Během pár vteřin se však Láďa vzpamatoval a s kamennou tváří vyštěkl směrem k tázajícímu se studentovi: „Já to nepotřebuji vědět! Já mám na to přece vás!“ Další, co Eda postřehl bylo hlasité Puk, následované protáhlým Pchhhh a nepřítomnost fyzikáře Ládi v učebně...

*Řešení úloh 1. série posílejte do **17.10.2011** na známou adresu:*

KoKoS

Gymnázium Mikuláše Koperníka

17. listopadu 526

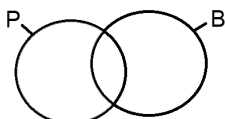
743 11 Bílovec



Teorie množin

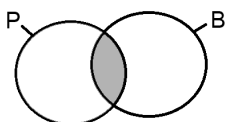
Vennovy diagramy jsou jednoduchým a názorným způsobem vizualizace vztahů mezi množinami. Množiny značíme jako protínající se uzavřené křivky (elipsy), přičemž body uvnitř představují prvky obsažené v množině, zatímco body vně do množiny nepatří. Pokud jsme schopní v zadání odhalit jednotlivé množiny, Vennovy diagramy nám zjednodušují řešení mnoha matematických úloh. Na jednoduchém příkladu si ukážeme, jak na to.

„Řešitelé korespondenčního semináře se věnují běhu a plavání.“



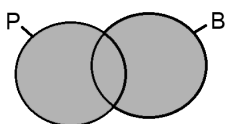
Tato věta nám říká, že řešitelé semináře tvoří dvě množiny – množinu běžců a množinu plavců. Tyto množiny si postupně označíme velkými písmeny B, P a zakreslíme je tak, aby se protínaly a měly určitý prostor společný.

„Plavání a zároveň běhání se věnuje osm řešitelů.“



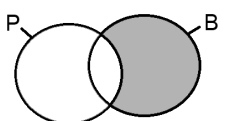
Těchto osm řešitelů tvoří množinu, která obsahuje právě ty plavce, kteří se věnují také běhání. V diagramech tedy hledáme oblast, jejíž prvky patří do množiny B a P zároveň. Toto splňuje oblast vyznačená šedě. V teorii množin se operace, při které vytváříme množinu obsahující prvky patřící do více množin zároveň, nazývá průnik množin a značí se pomocí symbolu \cap . Na obrázku bychom vyznačený průnik množin plavců a běžců zapsali jako $P \cap B$.

„Plavání nebo běhání se věnuje dvacet řešitelů.“



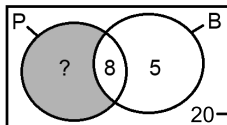
Těchto dvacet řešitelů tvoří množinu, která obsahuje řešitele věnující se alespoň jednomu z obou sportů. V tomto případě je to množina všech řešitelů. Operace, kdy vytváříme množinu obsahující prvky patřící alespoň do jedné z množin, se nazývá sjednocení množin a značí se symbolem \cup . Sjednocení množin plavců a běžců na obrázku bychom zapsali jako $P \cup B$.

„Plavání se nevěnuje pět řešitelů.“



Nyní vybíráme všechny prvky (řešitele), které nepatří do množiny plavců. V našem případě je tato množina shodná s množinou řešitelů, kteří se věnují pouze běhání. V teorii množin se operace, při níž vybíráme všechny prvky, které nepatří do určité množiny, značí nejčastěji

čárkou. Množinu obsahující všechny neplavce, bychom tedy označili P' . Pokud nyní zaznačíme do diagramu všechny zjištěné údaje, budeme schopni odpovědět na otázku: „Kolik řešitelů se věnuje pouze plavání?“



Řešitelé věnující se pouze plavání tvoří šedou množinu. Jednoduchým výpočtem $20 - 5 - 8$ zjistíme, že těchto řešitelů je sedm.

Katka a Pěťa

KoKoSové Prázdniny

Dlouhodobější řešitelé jistě vědí, že s podzimními prázdninami přichází i další KoKoSová akce a tou jsou KoKoSové Prázdniny. Rádi bychom Tě tímto pozvali! Uskuteční se 25. 10. – 28. 10. 2011 v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci. Na akci prozkoumáš nová zákoutí matematiky, o kterých se ti ani nezdálo, poznáš jiné řešitele KoKoSu a také nás – celou organizačtorskou bandu. Hlavně si ale užiješ akční program, který jsme pro tebe nachystali. Cena, stanovená na 150,- Kč, zahrnuje veškeré náklady na program včetně stravy a ubytování. Jakékoliv dotazy Ti rádi zodpovíme na našem e-mailu gmkkokos@seznam.cz. Pokud máš zájem, neváhej a co nejdříve vyplň internetovou přihlášku, kterou najdeš na kokos.gmk.cz/kopr.