

# KOKOS

25.ročník \* 1.leták

Milý řešiteli!

Už je tomu čtvrt století, kdy první série KoKoSu spatřila světlo světa. Ano, je to neuvěřitelné, ale právě pročítáš sérii z 25. ročníku našeho semináře. Jako obvykle zde naleznesh sadu netradičních, avšak zajímavých matematických úloh doprovázených napínavým příběhem a Pirohem, který ti pomocí teorie usnadní řešení vybraných příkladů. Hned v této sérii Ti nabízíme účast na našich KoKoSových prázdninách (podrobnosti naleznesh na zadní straně). Pokud budeš v našem semináři opravdu úspěšný a na konci školního roku se umístíš v celkovém pořadí na medailových pozicích, čekají tě pěkné ceny, které stojí za to!

Chceš poměřit své síly v rámci celé České republiky a zažít spoustu zábavy na našich soustředěních? Neváhej a pusť se do řešení! Nejdříve Ti ale doporučujeme přečíst si pravidla našeho semináře, kterými se každý správný KoKoSák za každých okolností řídí:

- KoKoS je celonárodní matematická korespondenční soutěž pro žáky 6. – 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
- Ročník je rozdělen do pěti sérií. V každé sérii Ti zašleme leták se zadáním úloh. Ty je vyřešíš a pošleš nám je zpět. My je opravíme, ohodnotíme a zašleme Ti je zase nazpátek spolu se zadáním další série.
- Řešení nám můžeš posílat poštou, nebo přes internet. Poté, co se zaregistruješ do semináře, od nás e-mailem obdržíš přihlašovací údaje ke svému účtu. Pomocí těch se přihlíšíš na **kokos.gmk.cz/login** a jednoduše nám svá řešení pošleš.
- Na řešení máš vždy několik týdnů. Toto je první série, jejíž uzávěrka je **22. října**. Rádi bychom Ti dali více času, ale KOPR spěchá.
- Jednotlivé příklady piš na papíry formátu A4 nebo A5. **Na každý papír piš řešení pouze jednoho příkladu!** Více příkladů na jednom papíru nám přidává práci a vzhledem k počtu řešitelů se takovými řešeními nemůžeme a nebudeme zabývat!

- U každé úlohy připiš **do levého horního rohu** své jméno, příjmení, **číslo série a úlohy** a navíc i adresu k Tobě do školy nebo domů - podle toho, kam si necháváš zasílat opravená řešení.
- U každého příkladu musíš pečlivě vylíčit postup řešení. Uvedeš-li pouze výsledek nebo nezdůvodníš-li dostatečně své závěry, nemusíme Tvé řešení považovat za kompletní a úplné – zbytečně poté ztrácíš body!
- V zadání příkladu vždy nalezneš maximální počet bodů, který za něj můžeš získat. Pokud příklad nedokážeš vyřešit úplně, ale uděláš alespoň nějaký pokrok, přisoudíme Ti odpovídající část bodů. Maximální bodový zisk za jednu sérii je vždy 40 bodů.
- Do našeho semináře se můžeš přihlásit kdykoliv, i v průběhu roku. Také nemusíš nutně odeslat všechny série nebo úlohy (i když poté Tě asi ve výsledkové listině předběhnou usilovnější řešitelé). Vždy ale musíš před prvním odesláním řešení (tedy pokud KoKoS řešíš poprvé) **vyplnit internetovou přihlášku!** Tu najdeš na adrese <http://kokos.gmk.cz/prihlaska>. Pokud už jsi vyplnil přihlášku v minulých ročnících, nemusíš to dělat znovu. Řešeními, která odešleš, aniž by ses řádně přihlásil, se nezabýváme.
- Vyplatí se pravidelně sledovat naše webové stránky <http://kokos.gmk.cz>. Najdeš zde aktuální informace o průběhu soutěže a také diskusní fórum, které můžeš použít, nebudeš-li úloze rozumět apod. Pokud se v zadání některého příkladu objeví chyba, zveřejňujeme opravy právě na těchto stránkách.
- Pokud Vás bude z jedné školy více řešitelů, bylo by pro Vás i pro nás vhodné, abyste svá řešení posílali jednotně prostřednictvím školy, tzn. v jedné obálce. My Vám poté zašleme opravené úlohy zase zpátky v jedné obálce. Toto není závazná podmínka, ale šetříte sobě i nám práci i peníze. Děkujeme!
- Každý ročník (6. – 9.) má svou vlastní výsledkovou listinu, aby nižší ročníky nebyly znevýhodněny.
- Úspěšným řešitelem KoKoSu se stává ten, kdo získá za celý ročník 90 bodů a více.

Hodně štěstí a zábavy při řešení Ti přejí Tví organizátoři:

*Vašek, Katka, Eli, Pěťa, Míša, Honza, Martin, Tomík, Terka a Anička*

## Zadání úloh



Na kraji města stála stará, napůl rozpadlá budova. Závěsy za špinavými okny byly zatažené a nad vchodem stálo „Restaurace U Černé kočky.“ Restaurace však už pár let nefungovala – poté, co zkrachovala, totiž připadla městu, které nemělo peníze ani chuť ji opravit. A protože nikdo nechtěl zchátralý dům se zašedlou omítkou koupit, stál tam úplně opuštěný a čekal na své vlastní zbourání.

Už několik let dovnitř nikdo nevstoupil... Tedy lidé se alespoň domnívali, že ne. Nikoho by ani ve snu nenapadlo, že ve skutečnosti se uvnitř budovy děje něco, co by se mělo velmi rychle zarazit.

Bylo právě podzimní odpoledne, obloha byla zamračená a každý, kdo nemusel ven, se-

děl doma v křesle s hrnkem horkého čaje.

Uvnitř bývalé restaurace seděli za masivním dřevěným stolem tři muži.

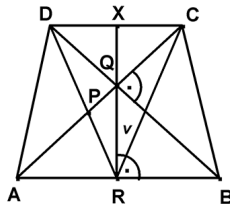
**Úloha 1. (8 bodů):** Nebyl to jen tak obyčejný kuchyňský stůl. Měl tvar rovnoramenného lichoběžníku a do jeho desky byly vyryty čáry a písmena jako na obrázku. Úhlopříčka  $AC$  desky stolu měřila 290 cm a body  $P, Q$  ji dělily v poměru  $AP : PQ : QP = 12 : 5 : 12$ . Výška  $v$  lichoběžníku tvořícího desku stolu byla 205 cm dlouhá. Urči obsah čtyřúhelníku  $RCQD$  a poměr jeho obsahu s obsahem celého lichoběžníku.

Místnost, kde se nacházeli, sloužila dříve jako kuchyň, avšak nenavštěvovalo tomu nic, snad až na velký děravý hrnc v rohu místnosti.

„Takže si ještě jednou zopakujeme celý plán,“ řekl jeden z mužů a přisunul si židli blíž ke stolu. Byl hubený a světlollasý, s poněkud dlouhým nosem a zálibou v konstruování vlastních přístrojů a zlepšováků. Své vynálezy zásadně používal k uskutečnění věcí ležících mimo zákon. Jmenoval se Viktor.

„Už jsme si ten plán přece procházeli dvakrát,“ namítl druhý muž. Jmenoval se Albert a výborně se vyznal v chemii, které zasvětil téměř celý svůj život. Na nose měl nasazené brýle s tlustými skly a neustále cosi čmáral na papír hustě popsaný výpočty. Často se choval roztržitě a občas kvůli vlastnímu výzkumu nevnímal, co se kolem něj děje.

**Úloha 2. (7 bodů):** Právě teď se snažil v pravém horním rohu svého papíru sepsat všechna šesticiferná čísla větší než 300 000, v jejichž dekadickém zápisu je každá z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6 použita právě jednou. Kolik takových čísel mohl vymyslet?



„Nezapomeňte, že stále nevíme, jak se dostaneme dovnitř, aniž bychom spustili alarm,“ prohlásil třetí z mužů. Neuměl sice montovat přístroje, ani nebyl geniální chemik, zato však velice rád rozkazoval ostatním, co mají dělat. Jmenoval se Adolf, byl vysoký, tmavovlasý a tvářil se nadměru důležitě.

„Musíme vymyslet, jak tam proniknout opravdu nepozorovaně,“ řekl a s jakýmsi očekáváním se díval na druhé dva muže. „A to co nejrychleji,“ dodal.

„Myslím, že už víme, jak to udělat,“ odpověděl Viktor. „Já a Albert jsme totiž včera dokončili něco, co nám umožní pohybovat se tak, že nás nikdo neuvidí.“

Adolf překvapeně zamrkal. „A co to je?“

Albert na chvíli vzhlédl od svých poznámek a pohlédl na Adolfa. „Neviditelný oblek.“

\*\*\*

František a Zita šli domů ze školy. Bydleli až úplně na kraji města, proto jim cesta domů vždy trvala dobrých třicet minut.

**Úloha 3. (6 bodů):** František vždy pečlivě měřil, kolik času jim cesta zabere. Urči, v jakém poměru je průměrná rychlost pohybu konce hodinové a sekundové ručičky na jeho hodinkách, pokud víš, že sekundová ručička je třikrát delší než hodinová.

„Nekoupíme si zmrzlinu?“ navrhl mladší pihovatý František, když míjeli cukrárnu.

„Co blázníš, na to je už trochu zima!“ Namítla Zita a zapnula si bundu až ke krku. „Radši pojď, ať už jsme doma.“

Pokračovali tedy dál v cestě a zanedlouho se dostali do uličky, kde stála stará, napůl rozpadlá budova s nápisem „Restaurace U Černé kočky.“ Ten dům Františkovi odjakživa naháněl strach, a když šli se Zitou kolem, často si ho s uctivým zájmem prohlížel. Zavadil pohledem o jedno z oken v horním patře. A tu uviděl, jak se hnědo-červený závěs malinko pohnul!

„Zito, tam nahoře straší!“ Vykřikl František a ustrašeně zatahal Zitu za rukáv.

„To je nesmysl,“ ujistila ho starší a statečnější sestra. „Už jsem ti přece říkala, že ti na ty výmysly neskočím.“

„Já jsem to viděl! Za tou záclonou někdo byl!“ Bránil se František, který si pevně stál za svým, a rozhodně nehodlal ustoupit, dokud mu Zita neuvěří. Do té doby odmítal jít dál a stále sledoval okno v horním poschodí.

**Úloha 4. (6 bodů):** Podotkněme, že okno mělo poněkud atypický tvar pravidelného šestiúhelníku. Urči součet délek všech úhlopříček šestiúhelníku, jestliže je délka jeho strany 1 m.

Zitě za chvíli došla trpělivost. „Když na tom trváš, klidně tam půjdu a dokážu ti, že uvnitř žádný duch není. Budeš pak konečně spokojený?“

František přikývl. „Ale budu čekat tady,“ dodal. Při pohledu na ten dům mu naskakovala husí kůže. Zita zatlačila do hlavních dveří, proklouzla dovnitř a potom Františkovi zmizela z očí.

\*\*\*

V dolním patře panovalo přitímní. Na zemi se povalovalo několik židlí a v koutě stál zaprášený stůl.

**Úloha 5. (5 bodů):** V prachu bylo nakresleno několik zajímavých obrazců. Mezi jinými tady bylo i několik trojúhelníků, pro vnitřní úhly jednoho z nich platily tyto vztahy:  $\alpha = 2\beta$ ,  $\beta = 3\gamma$ . Urči jejich velikosti.

Nikde nebylo ani živáčka. Zita se několikrát rozhlédla kolem, potom spatřila schody a vydala se po nich nahoru. Připadalo jí, že odněkud shora slyší lidské hlasy, ale přesvědčovala sama sebe, že se jí to jen zdá. Když se ocitla v horním patře, uviděla před sebou několik zavřených dveří. Došla k těm úplně na kraji a vzala za kliku. Byly to pánské toalety. Zita se chtěla otočit a vyzkoušet jiné dveře, ale potom ji upoutalo něco, co tady rozhodně nečekala. Na zemi pod jedním z umyvadel ležel malý černý kufřík. Rozhodně nevypadal, že sem patří, a Zita se k němu bez váhání vrhla. K její radosti nebyl zamčený a to, co spatřila uvnitř, jí málem vyrazilo dech. Chtělo se jí vykřiknout, když si uvědomila, co vidí. To snad nemůže být pravda! Schovala tu věc pod bundu a v tu chvíli jí bylo zcela jedno, co se skrývá za ostatními dveřmi. Vyběhla z budovy na ulici, kde ji čekal František. Tvářil se nervózně a samou netrpělivostí si hryzal nehty na levé ruce.



**Úloha 6. (8 bodů):** Před pár minutami kolem něj proběhla slečna s rozvlátnými vlasy a výrazem zmateného vědce. Snažila se mu předestřít svůj fyzikální problém, ale František vůbec nebyl s to ji vnímat. Zkusíte to alespoň vy?

Mějme soustavu tří těles — hvězda, planeta  $A$  a planeta  $B$ , přičemž obě planety obíhají hvězdu po soustředných kružnicích. Délka kratší oběžné dráhy, po níž obíhá planeta  $A$ , je 38 AU (1 AU = 150 000 000 km). Oběžná doba planety  $B$ , která obíhá po kružnici s větším poloměrem, je 10 let (uvažujte délku roku 365 dní). Rychlost oběhu planety  $B$  je 30 km/s. Dnes jsou planety v kvadratuře, což znamená, že úhel hvězda - planeta  $A$  - planeta  $B$  je pravý. Určete vzdálenost planety  $A$  od planety  $B$  a zbylé dva úhly v pomyslném trojúhelníku tvořeném planetami a hvězdou.

„Tak co?“ zeptal se dychtivě. Zita se rozhodla, že před ním prozatím pomlčí o tom, co v domě našla. „Nikdo tam není, říkala jsem ti to,“ snažila se tvářit klidně a chytila bratra za ruku. „Tak už pojď.“

\*\*\*

Viktor zatáhnul hnědo-červený závěs tak, aby nikde nezůstala ani jediná mezera, kdyby snad někdo měl v úmyslu je sledovat. „Tak kde máte ten neviditelný oblek?“ ptal se Adolf nedočkavě.

„Mám ho u sebe v kufříku,“ řekl Albert se samolibým výrazem ve tváři.

„Počkej, až ho uvidíš! Opravdu funguje. Zkoušeli jsme to.“

„Moment, a kde vlastně máš ten svůj kufřík?“ všiml si najednou Viktor. Albert se rychle rozhlédl po místnosti. Černý kufr nikde neviděl.

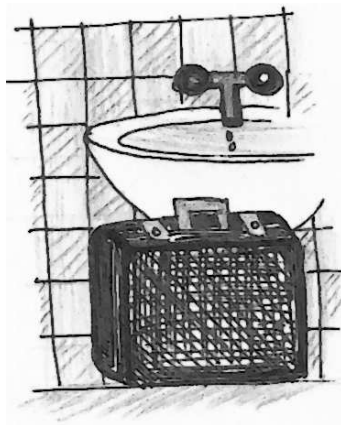
„A kruci! Musel jsem ho nechat na záchodě! Skočím se tam podívat.“ Vyběhl z místnosti a Viktor s Adolfem na sebe nervózně pohlédli.

„Nechat něco tak mimořádného, jako neviditelný oblek, někde na záchodě mohl jenom ten největší tupec!“ Stěžoval si Adolf.

„A já si vždycky myslel, že největší tupec z nás tří jsi ty,“ podotkl Viktor.

„Cos to řekl?“ vykřikl Adolf a zrudl až ke kořínkům vlasů. Viktor mu už už chtěl odpovědět, ale vtom ho něco přerušilo. Byl to Albertův zděšený výkřik vycházející z místnosti, kde se nacházely pánské toalety. Viktor a Adolf naráz vyrazili podívat se, co se stalo. Albert seděl nad prázdným černým kufříkem a v obličeji byl bledý jako stěna.

Neviditelný oblek zmizel.



*Řešení úloh 1. série pošlete do 22.10.2012 na známou adresu:*

KoKoS

Gymnázium Mikuláše Koperníka

17. listopadu 526

743 01 Bílovec



## Rovnice vyšších stupňů

### *Kvadratická rovnice*

V letošním Pirohu si povíme něco o rovnicích vyšších stupňů a jak je řešit. Rovnicemi vyšších stupňů se rozumí rovnice, které mají neznámou umocněnou na exponent vyšší než na druhou. Stupeň rovnice je dán nejvyšší mocninou neznámé, tedy rovnice  $x^5 + 7x^3 + 7 = 0$  je 5. stupně, zatímco  $x^2 = 4$  je rovnicí 2. stupně.

S těmito rovnicemi může nastat potíž ve chvíli, kdy se snažíme nalézt jejich kořeny. Ve většině případů na to potřebujeme vzorec, popř. ji musíme rozložit na součin několika výrazů. V tomto vydání a v několika dalších si postupně povíme, jak řešit kvadratické rovnice, jak odhadnout racionální kořeny u rovnic čtvrtého a vyššího stupně pomocí Hornerova schématu a nezapomeneme se zmínit také o kubických rovnicích.

### **Kvadratická rovnice**

Lze ji obecně zapsat jako  $ax^2 + bx + c = 0$ , kde  $x$  se nazývá proměnná a  $a, b, c$  koeficienty kvadratické rovnice. Jednotlivé členy kvadratické rovnice se nazývají:  $ax^2$  – kvadratický člen,  $bx$  – lineární člen,  $c$  – absolutní člen. U kvadratické rovnice musí platit:  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (jinak bychom měli danou lineární rovnici);  $b, c, x \in \mathbb{R}$ .

Kvadratické rovnice můžeme rozdělit na 4 případy:

1.  $a, b, c \neq 0$ ,
2.  $a = 1$ ,
3.  $b = 0$ ,
4.  $c = 0$ .

Dnes se podíváme na poslední dva zmíněné případy.

#### **a) $b = 0$**

Obecný tvar:  $ax^2 + c = 0$ . Tento typ lze považovat za nejjednodušší případ kvadratické rovnice, její obecné řešení vypadá takto:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + c &= 0 \\
 x^2 &= -\frac{c}{a} \\
 x &= \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}
 \end{aligned}$$

Stejně budeme postupovat, pokud budeme mít danu konkrétní kvadratickou rovnici – převedeme absolutní člen  $c$  na druhou stranu rovnice, vydělíme koeficientem kvadratického členu  $a$  a odmocníme (**odmocňovat lze pouze nezáporná čísla!**), kořeny této rovnice pak tvoří  $\pm$  odmocnina ze zlomku  $-\frac{c}{a}$ .

### b) $c = 0$

Obecný tvar:  $ax^2 + bx = 0$ . Další forma neúplné kvadratické rovnice, kdy chybí absolutní člen. V tomto případě je vhodné vytknout  $x$ , získáme tím  $x(x + b) = 0$ , a vzít v potaz pravidlo, že součin se rovná nule, pokud se nule rovná alespoň jeden z činitelů  $\Rightarrow$  jeden kořen tohoto typu kvadratické rovnice je vždy 0 a druhý  $-b$ .

*Katka a Honza*

## KOkosové PRázdnyiny

Není tomu dávno, kdy nás teplé letní počasí opustilo, a nastal podzim. Proč bychom však zoufali, když se blíží čas KOPRu (KoKoSových Prázdnin)? Tento rok se uskuteční **8.11.–11.11.** v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci. Cena, stanovená na **200,- Kč**, zahrnuje veškeré náklady na program včetně stravy a ubytování. Motivací Ti budiž fakt, že 5 nejlepším řešitelům první série snížíme cenu KOPRu na polovinu.

Během času stráveného na naší akci prozkoumáš nová zákoutí matematiky, o kterých se Ti možná ani nezdálo, poznáš nové kamarády KoKoSáky a také naši zapálenou organizátorskou bandu. Hlavně si ale užiješ spoustu zábavy s akčním programem a pronikneš hlouběji do komunity KoKoSu. Jakékoli dotazy Ti rádi zodpovíme na našem emailu [gmkkokos@seznam.cz](mailto:gmkkokos@seznam.cz). Pokud máš zájem, neváhej a co nejdříve vyplň internetovou přihlášku, kterou najdeš na <http://kokos.gmk.cz/kopr>.

P.S. Nezapomeň sledovat náš Facebook na adrese <http://facebook.com/gmkkokos>.