

# KOKOS

27.ročník \* 1.leták

Milý řešiteli!

Po letních prázdninách je zde opět 27. ročník našeho matematického semináře KoKoS . Jako vždy zde nalezněš 6 příkladů týkajících se matematiky a doprovázené poutavým příběhem a Pirohem. Pokud budeš velmi úspěšný a umístíš se na medailových pozicích na konci roku čekají na tebe zajímavé a hodnotné ceny, které se vyplatí.

Chceš-li poměřit síly proti spolužákům z celé České republiky v rámci našeho semináře se spousty zábavy a napínavým příběhem? Neváhej a hned se zaregistruj na stránkách KoKoSu! Ale nejdříve si přečti pravidla, které každý KoKoSák musí dodržovat:

- KoKoS je celonárodní matematická korespondenční soutěž pro žáky 6. – 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
- Ročník je rozdělen do pěti sérií. V každé sérii Ti zašleme leták se zadáním úloh. Ty je vyřešíš a pošleš nám je zpět. My je opravíme, ohodnotíme a zašleme Ti je zase nazpátek spolu se zadáním další série.
- Řešení nám můžeš posílat poštou, nebo přes internet. Poté, co se zaregistruješ do semináře, od nás e-mailem obdržíš přihlašovací údaje ke svému účtu. Pomocí těch se přihlíšíš na **kokos.gmk.cz/login** a jednoduše nám svá řešení pošleš.
- Na řešení máš vždy několik týdnů. Toto je první série, jejíž uzávěrka je **29. října**. Rádi bychom Ti dali více času, ale KOPR spěchá.
- Jednotlivé příklady piš na papíry formátu A4 nebo A5. **Na každý papír piš řešení pouze jednoho příkladu!** Více příkladů na jednom papíru nám přidává práci a vzhledem k počtu řešitelů se takovými řešeními nemůžeme a nebudeme zabývat!
- U každé úlohy připiš **do levého horního rohu** své jméno, příjmení, **číslo série a úlohy** a navíc i adresu k Tobě do školy nebo domů - podle toho, kam si necháváš zasílat opravená řešení.

- U každého příkladu musíš pečlivě vylíčit postup řešení. Uvedeš-li pouze výsledek nebo nezdůvodníš-li dostatečně své závěry, nemusíme Tvé řešení považovat za kompletní a úplné – zbytečně poté ztrácíš body!
- V zadání příkladu vždy nalezněš maximální počet bodů, který za něj můžeš získat. Pokud příklad nedokážeš vyřešit úplně, ale uděláš alespoň nějaký pokrok, přisoudíme Ti odpovídající část bodů. Maximální bodový zisk za jednu sérii je vždy 40 bodů.
- Do našeho semináře se můžeš přihlásit kdykoliv, i v průběhu roku. Také nemusíš nutně odeslat všechny série nebo úlohy (i když poté Tě asi ve výsledkové listině předběhnou usilovnější řešitelé). Vždy ale musíš před prvním odesláním řešení (tedy pokud KoKoS řešíš poprvé) **vyplnit internetovou přihlášku!** Tu najdeš na adrese <http://kokos.gmk.cz/prihlaska>. Pokud už jsi vyplnil přihlášku v minulých ročnících, nemusíš to dělat znovu. Řešeními, která odešleš, aniž by ses řádně přihlásil, se nezabýváme.
- Vyplatí se pravidelně sledovat naše webové stránky <http://kokos.gmk.cz>. Najdeš zde aktuální informace o průběhu soutěže a také diskusní fórum, které můžeš použít, nebudeš-li úloze rozumět apod. Pokud se v zadání některého příkladu objeví chyba, zveřejňujeme opravy právě na těchto stránkách.
- Pokud Vás bude z jedné školy více řešitelů, bylo by pro Vás i pro nás vhodné, abyste svá řešení posílali jednotně prostřednictvím školy, tzn. v jedné obálce. My Vám poté zašleme opravené úlohy zase zpátky v jedné obálce. Toto není závazná podmínka, ale šetříte sobě i nám práci i peníze. Děkujeme!
- Každý ročník (6. – 9.) má svou vlastní výsledkovou listinu, aby nižší ročníky nebyly znevýhodněny.
- Úspěšným řešitelem KoKoSu se stává ten, kdo získá za celý ročník 90 bodů a více.

Hodně štěstí a zábavy při řešení Ti přeji Tví organizátoři:

*Tomík, Kača, Terka, Jirka, Chrobý, James, Nagyn, Danek, Mele, Adam, Jiří,  
Tomáš, Berča, Barča, Katka, Venda a Damián.*

## Zadání úloh

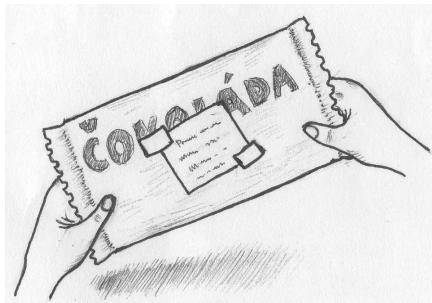
Na malém nádraží právě zastavil vlak. Lidé se začali pomalu hrnout dovnitř, jen tři chlapci stále neopustili lavičku na nástupišti. Dva z nich už nervózně pokukovali směrem k vlaku, ale třetí kluk stále seděl a horlivě cosi zapisoval do svého sešitu. „Jestli nám to kvůli tobě ujede, tak tě zabiju!“ prohlásil nejmenší z chlapců, Prokop. „Jen to dopočítám!“ bránil se Jáchym. „No jasně, na matematickém soustředění, kam jedeme, se k počítání vůbec nedostaneš.“ zašklebil se Ota. Jáchym se v tu chvíli zatvářil spokojeně a zvedl hlavu od svých zápisků. „Můžeme jít, už jsem to vyřešil.“ Ota i Prokop přistoupili blíž, aby se podívali, co Jáchym vlastně počítal.

**Úloha 1. (7 bodů):** Urči, pro která přirozená čísla  $a, b$  platí:  $ab = a^2 + 7$

„Jednoduché,“ poznamenal Ota důležitě, ještě než si příklad přečetl. „V tom případě mi později můžeš pomoci s další úlohou,“ zaradoval se Jáchym.

**Úloha 2. (7 bodů):** Máme pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$  a pravým úhlem při vrcholu  $C$ . Sestrojíme kružnici  $k$  s poloměrem  $|AC|$  a středem v bodě  $A$ . Kružnice  $k$  tedy protíná trojúhelník  $ABC$  ve vrcholu  $C$  a bodě  $D$ , který leží na úsečce  $AB$ . Dále máme bod  $E$ , který leží na úsečce  $BC$  a úsečku  $DE$ , která je rovnoběžná s úsečkou  $AC$ . Určete poměr délek úseček  $|AD| : |BD|$ , svírá-li úsečka  $DE$  s úsečkou  $BD$  úhel o velikosti  $60^\circ$ .

„To bych spočítal z paměti.“ prohlásil Ota a vytáhl z batohu čokoládu, kterou se cpal vždycky, když měl příležitost. Zatímco mířili přes nástupiště k vlaku, vylovil ji zevnitř svého batohu a nadskočil, když si všiml, že na obalu čokolády je připevněný malý kousek papíru. „Co to je?“ zajímal se Prokop a vzal lístek do ruky. Na lístku drobným písmem stálo: Přijďte co nejdříve za budovu nádraží. Je to důležité!



Všichni tři se začali podvědomě rozhlížet kolem. „Kdo to mohl psát?“ přemýšlel Ota a nevěřicně zíral na čokoládu. „Nebyl to nikdo z vás dvou, že ne?“ „Hned se dozvíme, kdo to byl“, mínil Prokop. „Pojďte.“ Obešli oprýskanou budovu a ocitli se tak na opuštěném dvorku, kde si tráva rostla, jak chtěla. Nikde v dohledu ale neviděli jediného člověka. „Co to má znamenat? To je nějaký vtip?“ rozčiloval se Ota. Čekali ještě další tři minuty, ale pořád se nic nedělo. „Kašleme na to, pojďte radši zpátky, vlak každou chvíli odjede.“ řekl Jáchym a v tu chvíli opravdu uslyšeli, jak se

vlak rozjíždí bez nich. „Sakra, další jede až za hodinu!“ vztekal se Ota. „Kvůli nějakému pitomému vzkazu přijedeme pozdě! No, aspoň si můžu v klidu sníst tu čokoládu.“

O dost později už všichni tři seděli v dalším vlaku a Ota, kterému už došla čokoláda, vytáhl šunkovou pizzu, kterou měl na oběd.

**Úloha 3. (6 bodů):** Pizza je nakrájená na 10 stejných dílků. Ota začne pizzu sám jíst. Za sedm minut se k němu přidá Jáchym. Za jak dlouho společně sní pizzu, jestliže Ota by celou pizzu snědl sám za 35 minut a za tento čas by Jáchym stihnul sníst 17,5 dílků pizzy?

„Proč si nedáš s námi?“ zeptal se Jáchym Prokopa a kriticky si prohlížel jeho zeleninový salát. „Zapomněl jsi, že šunku nejím?“ řekl Prokop. „Jsem vegetarián.“ Ota nad tím zakroutil hlavou, ale Jáchyma to už zase přivedlo na matematické myšlenky.

**Úloha 4. (5 bodů):** Na planetě žije asi 6 miliard lidí. Všichni, až na 3% všech lidí, jí maso. Řekněme, že každý člověk (až na ty 3%) sní za den 0,850g masa. Kolik tun masa by snědli všichni lidé dohromady za celý rok, kdyby jejich populace byla o 4% větší a pořád by platilo, že 3% lidí nejí maso?

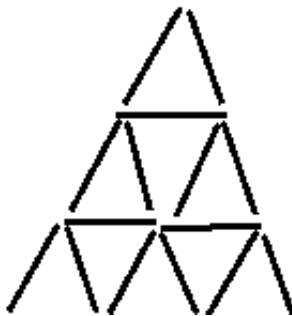
O další hodinu později už se nikomu nechtělo ani mluvit ani jíst. Nudná cesta se jim ještě protáhla, když museli kvůli jakési nehodě na kolejích zvolit jinou cestu a Ota na svém sedadle usnul. Jáchym se bavil stavěním domečků z karet, což nebylo snadné vzhledem k tomu, jak se vlak na nerovných kolejích každou chvíli zatřásl.

**Úloha 5. (8 bodů):** Jáchym si postavil pyramidu z karet, pak mu jeho kamarád Ota půjčil dalších 51 karet a Jáchym se rozhodl, že svoji pyramidu udělá větší. Jak byla velká původní pyramidu a o kolik se zvětšila?

Po nějakém čase začaly pole a domky kolem cesty ubývat a vystřídal je hustý les. Matematické soustředění, kam mířili, se mělo konat mimo civilizaci a nikdo z účastníků s sebou dokonce nesměl mít ani telefon. Ozvalo se skřípění brzd a vlak zastavil před malinkatým nádražíčkem na kraji lesa, kam vedla nepříliš široká pěšina. „Vstávej, Oto, vystupujem!“ zakřičel Prokop spícímu kamarádovi do ucha. Ota se s trhnutím vzbudil a smetl při tom ze stolku Jáchymův domeček z karet. Jakmile vystoupili, rozběhl se k nim jeden z instruktorů, který na nádraží čekal na příjíždějící účastníky soustředění. Ve tváři měl výraz obrovské úlevy a v ruce držel telefon.

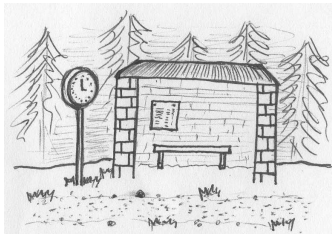
„Jste to vy?! Díky Bohu! Musíte hned zatelefonovat rodičům, všichni o vás mají strach!“ „O co jde?“ zamračil se Prokop. „Zpozdili jsme se přece jen o hodinu. Nešťastnou náhodou nám ujel vlak.“ „Nešťastnou náhodou?“ řekl instruktor. „Vlak, kterým jste měli jet, se na kolejích srazil s jiným vlakem. Většina cestujících to nepřežila! Musíte hned zatelefonovat svým rodičům, že jste v pořádku!“

**Úloha 6. (7 bodů):** Dvě města jsou od sebe vzdálena 185km. Z města  $A$  do města  $B$  vyjede vlak rychlostí  $65 \frac{km}{h}$ . V tu samou chvíli vyjede z města  $B$  vlak do města  $A$  po té samé koleji 80 kilometrovou rychlostí. Ve chvíli, kdy se vlaky rozjedou vstříc jisté zkáže, z předního okna (u strojvůdce) vlaku jedoucího z  $A$  do  $B$  vystartuje moucha rychlostí  $95 \frac{km}{h}$  a letí vstříc druhému vlaku. Ve chvíli, kdy k



němu doletí, dotkne se nožkou jeho předního skla a letí zpátky. Takto moucha lítá mezi vlaky než jí rozmáčknou. Úkolem je zjistit, kolik kilometrů moucha celkem nalétala.

Ani když později následovali instruktora po pěšině na místo soustředění, ještě stále nikdo z nich nemohl uvěřit svému štěstí. „Je to vážně podivné,“ mračil se Prokop a soustředěně uvažoval. „Myslím ten anonymní vzkaz. Vlastně nás tři zachránil.“ „Stejně by mě zajímalo, jak se dostal na moji čokoládu.“ řekl Ota trochu ublíženě, jako by se tím čokoláda nějak poškodila. „Hele, koukněte!“ přerušil je Jáchym a ukazoval na okraj cesty. Do prachu a písku byla zřetelně napsána dvě slova: „Není zač.“



*Řešení úloh 1. série pošlete do 29.10.2014 na známou adresu:*

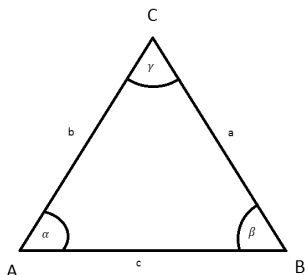
KoKoS  
Gymnázium Mikuláše Koperníka  
17. listopadu 526  
743 01 Bílovec



## Goniometrické funkce

V tomto pirohu vás seznámím s tím, co jsou a jak se používají goniometrické funkce. Goniometrické funkce se využívají k výpočtům délky stran, nebo velikosti úhlů v pravoúhlém trojúhelníku. Jinak řečeno, pokud známe úhel a délku jedné stran, můžeme jednoduše dopočítat velikost další strany.

### Opakování:



1. Značení stran: Strany značíme malými písmeny naší abecedy. Strana v trojúhelníku se nazývá podle bodu, naproti kterého leží.

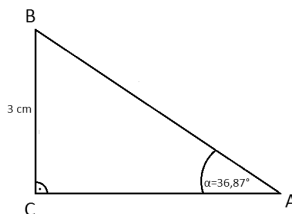
2. Značení úhlů: Úhly značíme malými písmeny Řecké abecedy. Úhel se nazývá podle toho u, kterého vrcholu leží např. Úhel v bodě A se nazývá malým písmenem a z řecké abecedy to je  $\alpha$ .

### Protilehlé a přilehlé odvěsny

Za protilehlou odvěsnu považujeme tu, která leží naproti zvolenému úhlu. Pokud si zvolím např. úhel  $\alpha$ , potom protilehlá odvěsna úhlu  $\alpha$  je strana  $a$ , přilehlá odvěsna úhlu  $\alpha$  je strana  $b$ . Teď, když poznáte protilehlou a přilehlou odvěsnu, si postupně rozebereme goniometrické funkce sinus (sin), cosinus (cos) a tangens (tan nebo tg).

### Sinus

Funkce  $\sin \alpha$  se rovná poměru délky protilehlé odvěsny a přepony.  $\sin \alpha = \frac{\text{Protilehlá odvěsna}}{\text{Přepona}}$   
Zkusme si vypočítat tímto způsobem délku přepony (strany  $c$ ). Mějme úhel  $\alpha = 36,87^\circ$  a trojú-



helník  $ABC$ , se stranou  $a = 3\text{cm}$ .

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{3}{\sin 36,87^\circ}$$

$$c = \frac{3}{0,6}$$

$$c = 5\text{cm}$$

Opačnou (inverzní) funkci najdete na kalkulačce pod názvem  $\sin^{-1}$ . Použijete ji, pokud známe poměr protilehlé odvěsny a přepony a chceme znát úhel  $\alpha$ . A tak to je i u ostatních goniometrických funkcí.

### Příklad

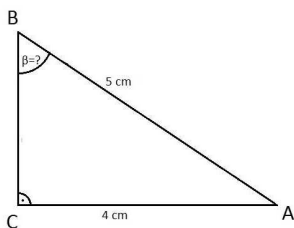
Mějme rozměry jako na obrázku a chceme vypočítat úhel  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5}$$

$$\beta = \sin^{-1} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\beta = 53,13^\circ$$



### Cosinus

Funkce cosinus úhlu alfa se rovná poměru délky přilehlé odvěsny a přepony.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Přilehlá odvěsna}}{\text{Přepona}}$$

### Tangens

Funkce tangens úhlu alfa se rovná poměru délky přilehlé odvěsny a protilehlé odvěsny.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Protilehlá odvěsna}}{\text{Přilehlá odvěsna}}$$

**Tabulka hodnot goniometrických funkcí pro:**

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

**Ostatní goniometrické funkce:** Tyto funkce se moc (spíš vůbec) v praxi nepoužívají, protože vztahy, které vyjadřují, si můžeme vyjádřit z těch základních třech (sin, cos, tan). Není důležité si je pamatovat, ale bylo by dobré aspoň vědět, že něco takového existuje.

Cotangens:

$$\cot \alpha = \frac{\text{Přilehlá odvěsna}}{\text{Protilehlá odvěsna}}$$

Sekans:

$$\sec \alpha = \frac{\text{Přepona}}{\text{Přilehlá odvěsna}}$$

Kosekans:

$$\csc \alpha = \frac{\text{Přepona}}{\text{Protilehlá odvěsna}}$$

### Obecné goniometrické funkce:

Pomocí těchto vzorců vám půjde lépe počítání goniometrický funkcí a taky vám mohou pomoci v různých výrazech týkajících se různých vět (např. u Sinovy věty apod.).

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Doufám, že jste toto téma pochopili. Příští PiRoH by vás měl seznámit s důležitými větami o trojúhelníku.

*Jirka*



## KOkosové PRázdniny

Není tomu dávno, kdy nás teplé letní počasí opustilo, a nastal podzim. Proč bychom však zoufali, když se blíží čas KOPRu (KoKoSových Prázdnin)? Tento rok se uskuteční **29.10.–3.11.** v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci. Cena, stanovená na **500,- Kč**, zahrnuje veškeré náklady na program včetně stravy a ubytování.

Během času stráveného na naší akci prozkoumáš nová zákoutí matematiky, o kterých se Ti možná ani nezdálo, poznáš nové kamarády KoKoSáky a také naši zapálenou organizátorskou bandu. Hlavně si ale užiješ spoustu zábavy s akčním programem a pronikneš hlouběji do komunity KoKoSu. Jakékoli dotazy Ti rádi zodpovíme na našem emailu [gmkkokos@seznam.cz](mailto:gmkkokos@seznam.cz). Pokud máš zájem, neváhej a co nejdříve vyplň internetovou přihlášku, kterou najdeš na <http://kokos.gmk.cz/>.

P.S. Nezapomeň sledovat náš Facebook na adrese <http://facebook.com/gmkkokos>.