

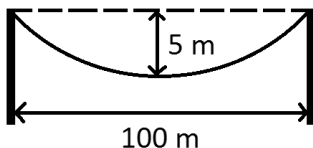
KOKOS

28.ročník * 2.leták

Milý řešiteli!

Taky se doma nudíš za chladných podzimních večerů? Nezoufej, přinášíme ti totiž další sérii KoKoSu. Čeká na tebe pokračování příběhu a další sada matematických úloh. Tak už na nic nečekej a dej se do řešení.

Zadání úloh

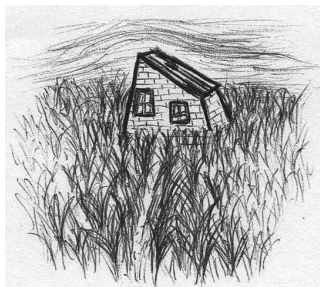


Druhý den ráno Pepík vyrazil. Po předchozí noci byl pořád zmatený, ale taky zvědavý, a tak byl odhodlaný novou záhadu vyřešit. Přemýšlel, jestli by neměl počkat na Ignáce, ale pak si řekl, že si radši nechá náskok, ať se pak neztrapní, když už nebude moct. Cesta Pepíkovi ubíhala rychle, ale byla dlouhá, a tak se po nějaké době začal nudit. Chvilí polemizoval o smyslu života, ale jelikož to byl roditelý matematik, rozhlížel se, co by si jen

spočítal. Hned mu padla do oka zajímavá věc.

Úloha 1. (7 bodů): Mějme dva stejně vysoké stožáry na jejichž vrcholech je připevněno lano, které není napnuté. Lano tvoří část kružnice neznámého poloměru. Sloupy jsou od sebe vzdálené 100 m. Dále rozdíl mezi nadmořskou výškou vrcholu sloupů a bodu kde je lano nejniž je 5 m. Určete délku lana. (viz. obr.)

Tím se Pepík na chvíli zaměstnal a když znovu přišel k sobě, byl skoro na místě. Tam se sešel s netrpělivým Ignácem. Místo, kam dojeli, byl velký starý dům uprostřed pole plného kukuřice. Chlapci se na sebe podívali. Vypadalo to jako místo z nějakého hororu. Ale než se stačili otočit a odjet, uslyšeli známý hlas. „Vítám vás, hoši. Jsem rád, že jste přijeli,“ objevil se za nimi duch z minulého večera. Ignác, i když ho Pepík varoval, dostal málem infarkt. Pepíkovi to ovšem bylo úplně jedno a začal se ducha vyptávat, co tam vlastně hledají a kde to mají najít. „Ne tak rychle, hoši. Až tam budete, musíte dávat velký pozor. Tento dům je už dlouho opuštěný a chátrá, takže si musíte dvakrát rozmyslet, kam šlápnete. A co hledáte? Pokud si dobře vzpomínám, je to kniha. Až ji najdete, určitě ji poznáte –



je to velmi stará, velká bichle, napsaná latinsky. Uvnitř by ale měla být prázdná – až na stránku nebo dvě, kde se má skrývat právě indicie k mému pokladu. Někjaké otázky?“ Pepík zavrtěl hlavou a Ignác už mezitím dávno přestal dávat pozor a přemýšlel nad vlastními problémy.

Úloha 2. (6 bodů): Jaký je počet přirozených čísel menších než 1000, která jsou dělitelná zároveň 4;5 a 7?

„Co na to říkáš, Ignáci? Ignáci?“ zatřepal s ním Pepík, „Že ty jsi vůbec nedával pozor? No, to je jedno, vysvětlím ti to znova za pochodu,“ řekl a vykročil směrem k domu a Ignác za ním. Nedalo mu to však, a musel se zeptat: „Ehm, pane duchu, a vy-“otočil se dozadu na ducha, ale ten tam nebyl. „Pepíku? Ten tvůj kámoš je pryč,“zabručel Ignác. Pepík se zastavil a zanádal. „A jak to teď máme zvládnout sami? To bude těžké. Najít v takovém obrovském domě nějakou knihu...ach jo. No nic, tak jdeme, ať už to máme za sebou.“ Chlapci společně došli do domu a opatrně ho celý prohledávali. Nemohli však nic najít, tak se rozhodli se rozdělit a hledat zvlášť. Ignác se vydal po schodech do prvního patra a na Pepíka zbylo přízemí. A tak sám bloudil velkými, zaprášenými místnostmi, které mu trochu naháněly strach. Najednou ale neopatrně stoupl na uvolněnou parketu...a propadl se do země. Nepadal moc hluboko, a naštěstí se mu nic nestalo, ale vyrazil si dech a chvíli mu trvalo, než se znovu postavil na nohy. Octl se v šeré místnosti, a když si na ni posvítíl mobilem, ukázalo se, že to byla knihovna! Pepík si řekl, že konečně bude mít štěstí, a knihu najde tady. Začal se tedy prohřabávat starými spisy, až našel zajímavý obrázek.

Úloha 3. (8 bodů): Máme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem r . Na kružnici leží dvě tečny, které spolu svírají úhel o velikosti 60° . Vzdálenost bodu dotyku tečny na kružnici a průsečíku tečen je 5 cm. Vypočítejte obvod a obsah kružnice. Zaokrouhlujte na tři desetinná místa.

Nebylo to však to, co Pepík hledal. Povzděchl si a hledal dál. Tak to šlo asi hodinu, než objevil něco, co mu zvedlo náladu – knihu, která vypadala přesně jako ta, kterou mu popisoval duch! Byla skutečně celá prázdná, až na jednu stranu, která byla odshora dolů popsána – Pepík však slovům vůbec nerozuměl. Mávl nad tím rukou a začal přemýšlet, jak se dostat z knihovny pryč. Hledal schody nebo dveře, ale nic nenašel. Začal tedy panikařit a křičet na Ignáce. Ten mu však neodpovídal. Tak si vyděšený Pepík sedl a čekal. A aby mu čas lépe utíkal, vzal si k sobě pár knih.

Úloha 4. (7 bodů): Pepík si udělal z 3 sloupce. V prvním sloupci byly pouze knížky hrubé 1 cm, v druhém knížky hrubé 2 cm a ve třetím sloupci knížky hrubé 3 cm. Počet knížek vysokých 3cm byl $\frac{1}{6}$ ze všech knížek. Druhý sloupec byl o 40% vyšší než třetí sloupec. V prvním sloupci byl nejmenší možný celočíselný počet knížek. Kolik bylo knížek vysokých 1 cm? O kolik cm byl první sloupec nižší nebo vyšší než sloupec třetí?

Pepík si hrál s knihama a najednou uslyšel známý hlas – to ho volal Ignác! Pepík na něj zavolal nazpátek a druhý chlapec se hned objevil v díře, kterou se Pepík předtím propadl. Pořád ale zůstávala otázka, jak se Pepík dostane ven. Ignác se zamyslel. „Hmm, zdálo se mi, že jsem venku viděl žebřík, počkej tady chvilku,“ křikl a zmizel. Za pár minut

se skutečně vrátil i se žebříkem, který prostrčil dírou a brzo už byl Pepík venku. „Kdes byl vlastně tak dlouho, Ignáci?“ zeptal se. „No, to máš tak – prohledal jsem celé patro, nic jsem nenašel, a tak jsem šel zpátky. Vevnitř jsi nebyl a venku taky ne, tak jsem si říkal, že ses asi šel projít. Tak jsem si sedl a kreslil si do hlíny, než mi začalo být divné, že se nevracíš. Tak jsem tě začal volat, no, a dál už to znáš. A když už o tom tak mluvíme, nechceš se podívat, co jsem nakreslil?“ zeptal se. Pepík souhlasil a tak společně vyšli na dvorek k Ignácově nákresu. „Schválně, jestli to dokážeš vyřešit,“ zajímal se Ignác.

Úloha 5. (8 bodů): Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, přičemž S je střed strany BC . Určete poměr obsahů trojúhelníků ABE , ESC a ASC .

Chlapci se pomalu vydali ke svým kolům. Tam na ně už však čekal duch. Když mu Pepík ukázal knihu, duch se rozveselil. „Výborně, hoši! To je ona! Odvedli jste skvělou práci, moc vám děkuji. Není sice v češtině, ale to nevadí – s překladem vám rád pomůžu.“ zasmál se a zmizel. „Musí pořád jen tak mizet? Ani jsme se ho nemohli na nic zeptat!“ rozzlobil se Ignác. „Příště si s ním o tom budeme muset promluvit – nebo se o to aspoň pokusit.“ uslíbl se Pepík. A tak se chlapci vydali společně domů. Po cestě si dávali různé úkoly, aby se zabavili a soutěžili, kdo vymyslí těžší a kdo jich vyřeší nejvíc.

Úloha 6. (6 bodů): Je známo, že číslo 2013 se dá právě jedním způsobem zapsat jako součet dvou prvočísel. Čemu je roven jejich součin?

Nakonec v obou ohledech vyhrál Pepík. Ignác byl trochu zklamaný, ale Pepík mu slíbil, že ho jako cenu útěchy pozve na zmrzlinu, takže se brzy uklidnil. Když chlapci přijeli domů, bylo ještě světlo. Ale protože byli vyčerpaní, na nic nečekali a šli spát. Pepík si dokonce ani nevšiml ducha, který stál naproti jeho domu a vědouce se usmíval.



Řešení úloh

2. série posílejte do **16.12.2015** na známou adresu:

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526

743 01 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

Vytvoříme si rovnici o jedné neznámé n , která zastupuje počet bombónů odevzdávaných Pepíkem první den. Levou stranu dostaneme vyjádřením celkového počtu bombónů po čtyřech dnech a pravá strana bude představovat desetinásobek n zvětšený o 34:

$$n + 2n - 1 + 2(2n - 1) - 1 + 2[2(2n - 1) - 1] - 1 = 10n + 34$$

$$15n - 11 = 10n + 34$$

$$n = 9$$

Pepík musí dát Ignácovi první den 9 bombónů.

Barča

Úloha 2.

Zde si musíme nejprve uvědomit, že můžeme každou pro každou přímku ať už v rovině nebo v prostoru pomocí souřadnice x , kterou dosadíme do nějakého vzorce dopočítat souřadnici y (popř. z). Tento vzorec určíme velice jednoduše. Víme, že pro jakoukoliv lineární funkci platí: $y = ax + b$ a my musíme určit koeficienty a a b . Ukažme si to na první přímce, která je dána body $[1,1,3]$ a $[3,5,5]$: Pokud za x dosadíme 1 vyjde $y = 1$ a pokud 3 vyjde 5 z toho sestavíme následující rovnice:

$$1 = a_1 \cdot 1 + b_1$$

$$5 = a_1 \cdot 3 + b_1$$

Vyřešíme tuto soustavu rovnic a zjistíme, že $a_1 = 2$; $b_1 = -1$. Teď můžeme vypočítat souřadnici y pro libovolnou souřadnici x . Tím samym způsobem můžeme vypočítat koeficienty pro souřadnici z . Budeme vycházet zase z předpisu $z = ax + b$.

$$3 = c_1 \cdot 1 + d_1$$

$$5 = c_1 \cdot 3 + d_1$$

Vyřešením zjistíme, že: $c_1 = 1$; $d_1 = 2$. Můžeme zapsat, že pro první přímku platí:

$$y_1 = 2x - 1$$

$$z_1 = 1x + 2$$

Tyto koeficienty vypočítáme i pro druhou přímkou. A vyjde nám, že pro druhou přímkou platí:

$$\begin{aligned}y_2 &= 1x + 6 \\z_2 &= 2x - 5\end{aligned}$$

Pokud existuje bod, kde se tyto dvě přímky protnou tak bude ležet tam kde se budou shodovat všechny souřadnice obou přímek. Můžeme říct, že se zde bude $y_1 = y_2$ a $z_1 = z_2$. Pokud tyto rovnosti nastanou pro stejný bod x tak se tyto přímky protnou v prostotu.

$$\begin{aligned}y_1 &= y_2 \\2x - 1 &= 1x + 6 \\x &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= z_2 \\1x + 2 &= 2x - 5 \\x &= 7\end{aligned}$$

Pokud dopočítáme podle vzorců, které jsme si určily, zjistíme, že se přímky protnou v bodě: [7,13,9].

Jirka

Úloha 3.

Na políčkách ukazující počet minut pětka bude po dobu 15 minut. Budou to minuty 05, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59. Na políčkách ukazující počet hodin to bude po dobu 2 hodin tj, 120 minut. Za celý den to bude dohromady 120 minut a zbylých 22 hodin ve, kterých se objevuje pětka 15 minut. $120 + 22 \cdot 15 = 450$ Na digitálních hodinkách se alespoň 1 pětka vyskytuje 450 minut denně.

Berča

Úloha 4.

Objem kvádra je roven 24cm^3 . Po rozdělení na tři stejné krychle bude objem 1 krychle 8cm^3 . Jelikož je objem krychle roven třetí mocnině jeho hrany, bude délka hrany $\sqrt[3]{8}$, což jsou 2 cm.

Kika

Úloha 5.

Abychom zjistili v kolik hodin oba dva dorazí na statek musíme spočítat dobu za, kterou tam dorazí Ignác, protože je pomalejší a vychází později. Ignác jde rychlostí $20 \frac{km}{h}$ a cesta na statek je dlouhá 60 km, proto Ignác půjde na statek tři hodiny a bude mít celkem 2 pětiminutové přestávky. Dorazí na statek v 10:25 . Pepík bude mít během své cesty také dvě přestávky. Spočítáme si za jak dlouho by ušel trasu bez přestávek a zbylý čas cesty tvoří tyto dvě přestávky.

$$s = 60km$$

$$v = 20 \frac{km}{h}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{60}{20}h$$

$$t = 3h$$

Pepík půjde 2,3 hodiny, což jsou 2 hodiny a 18 minut. Nesmíme zapomenout, že Pepík vyšel už v 7:00, tudíž jeho cesta bude trvat 3 hodiny a 25 minut. Na přestávky mu zbývá 1 hodina a 7 minut. Pepíkova přestávka je dlouhá přibližně 33 minut a 30 sekund.

Terka

Úloha 6.

Označme si část šálku s černým čajem jako x a část s kávou y . Víme, že množství černého čaje a kávy dá dohromady 1 hrnek a energie z něho bude na 2 hodiny. Z tohoto sestavím tyto dvě rovnice:

$$x + y = 1$$

$$x + 4y = 2$$

Tuto soustavu rovnic vyřešíme a zjistíme, že poměr černého čaje a kávy je 1 : 2 .

Nagy

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu řešitelů podle ročníků.

6. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	<i>S</i>	Σ
1.	Adéla	Houdková	4	-	7	5	5	-	21	21
2.	Vít	Mičkech	1	-	7	5	-	-	13	13
3.	Zuzana	Krčmáriková	-	-	7	5	-	0	12	12
4.	Dalimil	Šťastný	1	-	2	5	1	1	10	10
5.	Ondřej	Beníšek	-	-	1	-	-	0	1	1

7. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	<i>S</i>	Σ
1.	Karel	Plášek	8	9	7	5	7	6	42	42
2.	Martin	Mlečka	6	1	7	5	6	6	31	31
3.	Michaela	Čulíková	8	-	7	5	4	6	30	30
4.	Mikuláš	Hlaváček	8	-	7	5	6	1	27	27
5.	Eliška	Jordánková	5	-	7	5	-	6	23	23
6.-7.	Gabriela	Dvorská	8	-	7	5	-	-	20	20
	Nikola	Razakowská	8	-	7	5	-	-	20	20
8.	Eliška	Hybnerová	6	-	7	1	-	-	14	14
9.	Matouš	Řezníček	1	-	7	5	-	-	13	13
10.	Marek	Dobiáš	-	-	2	5	-	-	7	7

8. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Jiří	Močkoř	8	9	7	5	3	-	32	32
2.	Natálie	Maleňáková	8	-	7	5	-	-	20	20
3.-4.	Vilém	Jankovský	8	-	3	5	-	1	17	17
	Veronika	Krčmáriková	4	-	7	5	-	1	17	17
5.-6.	Matěj	Martiník	-	-	7	5	-	-	12	12
	Matěj	Volf	-	-	7	5	-	-	12	12

9. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.-2.	Jana	Kolenovská	8	9	4	5	6	1	33	33
	Martina	Novotná	8	-	7	5	7	6	33	33
3.	Alina	Mojšová	8	1	7	5	-	-	21	21
4.	Jan	Kačenka	-	-	7	5	-	1	13	13