KOKOS

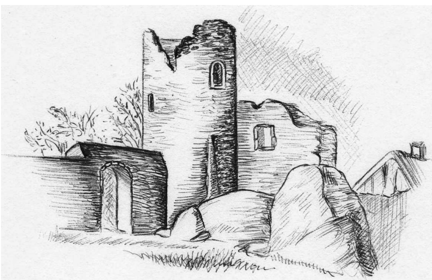
28.ročník ⋆ **4.leták**

Milý řešiteli!

Kvůli technickým potížím, za které se omlouváme, nebylo možno sérii vydat dříve, ale teď už se můžeš s chutí pustit do řešení. Na našich stránkách kokos.gmk.cz také již brzy nalezneš fotky z uplynulého jarního soustředění! Držíme ti palce při řešení, tak vzhůru do toho!

Zadání úloh

Pepík se posadil na postel s smutně koukal do země, když vtom se nad ním ozvalo: „Co tak smutně, hochu?“ vzhlédl a nevěřil svým očím – v jeho pokoji stál duch! Usmál se na něj a pokynul směrem ke knize. „Pokročili jste nějak s textem? Jestli ne, nevadí! Latinu plynně ovládám, takže to nebude problém!“ a pak se pustil do čtení. Než skončil, připojil se k nim i zmatený Ignác a společně měli za malou chvíli jasno – pro duchův ztracený poklad se museli vydat na hrad, poblíž něhož byl schován. Naštěstí pro ně hrad – nebo spíš už jen jeho zřícenina – nestál moc daleko a Pepík s Ignácem to místo dobře znali, a tak se rozhodli hned další den vyrazit.



Když druhého rána dosrazili ke zřícenině, duch už tam na ně nervózně čekal. Když uviděl chlapce, ukázal na zem pod sebou. „Přímo pode mnou leží můj poklad. Ovšem dostat se k němu nebude tak jednoduché, protože jsem ho nezakopal, ale schoval do tajného sklepení. Zde je vchod a musím vás varovat – vevnitř si musíte dávat velký pozor!“ Kluci přikývli a začali s kopáním. Zanedlouho odkryli staře vypadající poklop, který s vypětím veškerých sil otevřeli a slezli dolů po žebříku, který sice vypadal nebezpečně ztrouchnivěle, ale to je nezastavilo. Byli rádi, že si s sebou vzali baterky, protože dole byla úplná tma. Po chvíli ale narazili na překážku – byla to zeď, na které byl obraz trojúhelníku a pod ním do kamene vysekaná různá čísla. Duch za nimi se ozval: „Obávám se, hoši, že když jsem poklad ukrýval, byl jsem důkladný, a tak je po cestě několik hádanek, přes které se musíte dostat. Podívejte, tady na zemi leží pergamen se zadáním hádanky. Máte však jen jeden pokus, a pokud úlohu vyřešíte špatně, budete čelit jisté smrti!“ Pepík se otřásl, zamumlal pár nadávek a pustil se s Ignácem do řešení.

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec

Úloha 1. (7 bodů): Máme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Délka strany AC je 6 cm a délka strany BC je 8 cm. Dále existují body X, Y, které po řadě leží na stranách BC a AB tak, že úsečka XY je rovnoběžná s úsečkou AC. Délka úsečky XC je 2 cm. Vypočítejte obsah lichoběžníku $AYXC$ a délku úsečky BY.

Kluci se podívali na stěnu – a čísla, která jim vyšla, skutečně byla na zdi. „Zkuste do nich zatlačit," vybídl je duch. Ignác to zkusil, a čísla na stěně pod tlakem povolila. Najednou se začala celá stena třást a pak se odsunula. Kluci zajásali, odhodili zadání a pokračovali dál. Druhá hádanka na sebe ale nenechala dlouho čekat. Jen, co přeskočili pár kaluží, přelezli několik uvolněných kamenů a podlezli pár větví, zastavila je další stěna, velmi podobná té první, ale nebyl tam žádný trojúhelník, je čísla. Kluci rychle našli pergamen se zadáním a začali luštit.

Úloha 2. (7 bodů): Nalezněte nejmenší přirozené číslo, které končí na 15, je dělitelné 15 a má ciferný součet 15.

Opět se ukázalo, že kluci vyřešili příklad správně, a tak pokračovali chodbou dál. Za několik minut narazili na další stěnu pokrytou čísly, ale tentokrát kolem nebyl k nalezení žádný pergamen ani jiná nápověda. Kluci chvíli hledali, ale pak to už Ignác a vykřikl: „To si děláte srandu, ne? Už mě to tu fakt štve! Prostě to tady nějak pomačkám, to se vsákne…" a zatlačil do náhodného čísla na zdi…ale nevsáklo se to. Pepík už na něj ani nestihl zakřičet, a najednou všichni padali dolů…v letu ještě Pepík stihl zachytit dřevěnou destičku, na které nebylo vyryto nic jiného, než zadání příkladu, který Ignác pokazil.

Úloha 3. (7 bodů): $a333b$ je pěticiferné číslo dělitelné číslem 36. Najděte všechny možné hodnoty součinu $a \cdot b$.

Pepíka ještě stihla vzteky rozbolet hlava, když uslyšel hlasité šplouchnutí – a hned nato se sám ponořil do ledové vody. Ulevilo se mu, že aspoň spadl do měkkého, i když měl pocit, že umrzne. Potápěl se stále hlouběji, až mu došlo, že by možná bylo fajn, kdyby se neutopil, a tak posbíral zbytky sil a vynořil se na hladinu. Chvíli nemohl najít břeh, ale uslyšel Ignácovo volání a plaval za ním – a ukázalo se, že druhý chlapec břeh našel, a tak byli oba sice na kost mokří, ale živí. Pepík nejprve chtěl Ignácovi všechno vyčíst, ale když viděl, jak nešťastně se jeho kamarád tváří, rozmyslel si to. Vytáhl baterku, kterou si naštěstí stihl bezpečně dát do kapsy, a která byla voděodolná, takže pořád fungovala, a rozhodl se, že bude ignorovat zimu a pokusí se najít východ z jeskyně, do které se dostali. Chvíli bloudil, až o něco zakopl – nebyl to východ, ale podivný předmět.

Úloha 4. (6 bodů): Mějme kostku, na jejíž strany můžeme napsat 6 čísel (na každou stranu jedno). Při jednom kroku přičteme číslo 1 ke dvěma číslům na protějších stranách kostky. Najděte všechny množiny šesti čísel se součtem 12, jestliže víme, že tato čísla můžeme napsat na kostku tak, že po určitém počtu kroků dosáhneme stejných čísel na všech stranách kostky.

Chlapce kostka zaujala, a rozhodl se nechat si ji. Bloudil dál, a všiml si, že se stěna jeskyně zarovnala – skoro, jako by ji vytesala lidská ruka. Šel podél stěny dál, a narazil otvor, kterým pronikalo slabé světlo – to mohla být jejich cesta ven! Otvor byl však příliš malý a příliš vysoko, než aby jím kluci prolezli – byl totiž z většiny zasypán kamením. Pepík zavolal na Ignáce a společně se pokoušeli kamení odházet.

Úloha 5. (8 bodů): Pepík odhazuje kamení. Když se chvástal Ignácovi s tím, za kolik minut odhodí kolik kamenů, spletl se a prohodil počet minut s počtem kamenů. Ignác podle těchto informací spočítal, kolik kamenů Pepík odhodí za 5 hodin, a tak mu dal za úkol jich tolik odhodit. Pepíkovi však trvala práce o 2 hodiny a 12 minut déle. Kolik kamenů odhodil?

Unaveným chlapcům se ulevilo, když se ukázalo, že měli pravdu a otvor ve zdi byl větší, než vypadal. Prolezli jím a nestačili se divit. Místnost, ve které se octli, byla přepychově vyzdobená a úzkými štěrbinami ve stropě dovnitř pronikalo denní světlo. Chlapcům hned došlo, že to byla ta místnost, kterou hledali – někde tam musel být duchův poklad! Nejprve se však kluci chvíli kochali krásou oné místnosti – obzvláště pak obrazy, které visely na zdech.

Úloha 6. (7 bodů): Na stěnách bylo 9 obrazů namalovaných za pomocí 9 různých barev. Každý z obrazů byl namalován za pomocí 1-6 barev. Použít 1 barvu v 1 obraze znamenalo využít celou nádobičku s konkrétní barvou. Na 1. obraz se použila červená ($\check{C}$), zelená (Z), žlutá ($\check{Z}$), modrá (M), růžová (R) a fialová (F), na 2. obraz se použila oranžová (O), bílá (B), hnědá (H), $\check{Z}$ a 1 další barva, na 3. obraz se použila $R, \check{Z}, Z, O$ a 2 další, na 4. obraz $M, Z, F, \check{Z}$ a 1 další, na 5. obraz H a 1 další, na 6. obraz M, O a B, na 7. Z, R, F a 1 další, na 8. $Z, \check{Z}, R$ a H. $\check{Z}$ nádobiček bylo 8, $\check{C}$ bylo 3, O bylo 3, R bylo 5, H bylo 3, Z bylo 6, M bylo 3, F bylo 4, B bylo 3. Na 9. obraze nebyla B ani Z, na 3. obraze nebyla B. Kolik barev a kterých bylo na 9. obraze?

V tom se za nimi ozvalo zatleskání. „Skvěle, hoši! Našli jste to! Mám opravdovou radost! Teď už jen najít truhlu s mými zlatými kostkami a můžeme jít!“ A tak hledali. To netrvalo dlouho, protože obrovská truhlice, která stála v rohu, se nedala přehlédnout. Byla však uzamčená, a to na podivný čtvercový zámek. Pepíkovi se ale rozsvítilo a vytáhl z kapsy podivnou kostku, kterou našel venku u vody – a ač tomu nemohl uvěřit, truhlice se opravdu otevřela! Uvnitř ležely na sametové podestýlce tři stejné zlaté krychle. Byly docel těžké, ale kluci je zvládli unést, a tak je vzali a pospíšili si najít cestu ven. Bylo jim trochu líto, že neměli čas si krásnou místnost prohlédnout lépe, protože denního světla už začalo ubývat, ale když se s duchovými instrukcemi dokázali o něco později dostat ven, byli skutečně šťastní, že celý výlet přežili.

*Řešení úloh 4. série posílejte do **15.06.2016** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Nejprve si rozložme číslo 450 na součin prvočísel.
$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
Jednotlivé neznámé a, b, csi zapíšeme následujícím způsobem.
$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$
$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$
$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$
Kde všichni mocnitelé jsou nezáporná přirozená čísla. Pokud součin těchto čísel má dát dohromady 450, Musí být součet mocnitelů nad jednotlivými prvočísly u čísel a, b, c roven velikosti mocnitelů u těch samých prvočísel u čísla 450.
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$
$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$
$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2$
Dále vypočítáme počet možných hodnot, kterých mohou jednotlivé neznámé nabývat. U první rovnice jsou 3, u druhé jich je 6 a u třetí také 6. Součinem těchto kombinací získáme konečný výsledek, který je 180.

Jirka

Úloha 2.

a) Pravděpodobnost, že padne 1, je $\frac{1}{3}$. Pravděpodobnost tří jedniček je:
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
b) Celkový počet kombinací je $6 \times 6 \times 6 = 216$. Mouhou padnout tři 2/3/4/5 $\rightarrow$ 4 možnosti. Pravděpodobnost, že padnou tři stejná čísla kromě jedniček je:
$\frac{4}{216} = 1 : 54$.
c) Máme 216 kombinací. Jedničky mohou padnout čtyřmi možnostmi, dvojka ke každé kombinaci jedniček může padnout třemi způsoby $\rightarrow$ 12 možností. Pravděpodobnost, že padnou dvě jedničky a dvojka, je $\frac{12}{216} = 1 : 18$.

Berča

Úloha 3.

a) Na místě desítek může být právě 9 číslic (číslic je 10, ale nula na této pozici být nemůže). Na místě jednotek může být rovněž 9 číslic (na této pozici nemůže být číslice, co už je na místě desítek, to máme $10 - 1 = 9$ číslic). Podle pravidla součinu tedy máme takových dvojciferných čísel $9 \cdot 9 = 81$. b) Na místě stovek může být 9 číslic (jako u předchozího případu), na místě desítek vybíráme z deseti číslic kromě jedné, která už je na místě stovek, tedy zde může být opět 9 číslic. Na místě jednotek vybíráme z deseti číslic kromě dvou, které už obsadily místa stovek a desítek, tedy máme na výběr z 8 číslic. Použijeme pravidlo součinu a dostaneme 9·9·8=648 trojciferných čísel splňující tuto vlastnost. Můžeme použít i pravidlo součtu, kdy spočítáme všechna dvojciferná čísla (90) a odečteme taková čísla, kde se číslice opakují (takových dvojciferných čísel je 9, např. 11, 22, 33...). U trojciferných čísel se to už však tolik nevyplatí, protože počítání čísel s opakujícími se číslicemi bude složitější.

Barča

Úloha 4.

a) Interval zpívání ptáčků získáme zjištěním nejmenšího společného násobku intervalů zpívání ptáčků. A to je $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$.
b) Počet hodin zjistíme vydělením intervalu v minutách číslem 60: $\frac{840}{60} = 14$.
c) Hlasitost zelených ptáčků je alespoň $600H$, ale méně než $650H \rightarrow$ pokud je hlasitost 1 ptáčka $20H$, tak těch ptáčků může být 30 – 32. 8 žlutých ptáčků by dávalo dohromady $280H$, 9 by dávalo $315H$. Protože H zelených ptáčků je alespoň 300, proto žlutých ptáčků je 9 nebo více. Modrých ptáčků je 17.
Proto platí, že $(30 + a) + 17 + \; + (9 + b) = 60$, kde a je 0, 1 nebo 2; $č$ je počet červených a b je alespoň 0.
$a + b + \; = 4$
a jsou zelení ptáčci s hlasitostí $20H$, b jsou žlutí ptáčci s hlasitostí $35H$, jsou červení ptáčci s hlasitostí $15H$. Platí, že hlasitost zelených, modrých, červených a žlutých ptáčků je dohromady $1420H$. Pokud od toho odečteme hlasitost 30 zelených, 17 modrých a 9 žlutých ptáčků, tak nám vyjde, že
$a \cdot 20H + b \cdot 35H + \; \cdot 15H = 80H$
Pokud by $a = 0$, tak zbývajících $80H$ by mohly tvořit pouze 3 červení a 1 žlutý ptáček.
Pokud by $a = 1$, tak zbývajících $60H$ by nemohla tvořit kombinace 3 červených a žlutých ptáčků.
Pokud by $a = 2$, tak zbývajících $40H$ by nemohla tvořit kombinace 2 červených a žlutých ptáčků.
Takže počet zelených ptáčků je 30, modrých 17, červených 3 a žlutých 9.

Nagyn

Úloha 5.

Pravděpodobnost, že uhádne barvu první karty je $\frac{1}{4}$. Počet karet je 64, proto pravděpodobnost, že uhádne všechny karty je $(\frac{1}{4})^{64} = \frac{1}{4^{64}}$.

Tomáš

Úloha 6.

Pravděpodobnost, že budou na první hromádce pouze karty s jedním znakem, je $\frac{8\cdot 4!}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}$, protože můžeme zvolit celkem $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ karet, podmínce vyhovuje jenom 8 možností a 4! je zde, jelikož nám nezáleží na pořádí zvolení karet. Podobně určíme pravděpodobnost pro druhou a další hromádky a výslednou pravděpodobnost získáme součinem těchto pravděpodobností. Pravděpodobnost, že v každé hromádce budou mít všechny karty stejný znak, je $\frac{8\cdot 4!}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29} \cdot \frac{7\cdot 4!}{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25} \cdot \ldots \cdot \frac{1\cdot 4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8!\cdot 4^6}{32!}$.

Chroby

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu všech řešitelů.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Adéla	Houdková	3	7	1	3	0	1	15	67
2.	Zuzana	Krčmáriková	3	-	3	0	-	-	6	37
3.	Vít	Mičkech	-	-	-	-	-	-	0	27
4.	Dalimil	Šťastný	-	-	-	-	-	-	0	23
5.	Ondřej	Beníšek	-	-	-	-	-	-	0	1

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Karel	Plášek	3	7	5	8	6	3	32	114
2.	Martin	Mlečka	3	7	6	5	3	1	25	77
3.	Michaela	Čulíková	3	7	6	-	3	1	20	69
4.	Nikola	Razakowská	-	-	-	-	-	-	0	60
5.	Gabriela	Dvorská	-	-	-	-	-	-	0	54
6.	Alexandr	Skalský	-	-	-	-	-	-	0	42
7.	Michal	Procházka	-	-	-	-	-	-	0	37
8.	Mikuláš	Hlaváček	-	-	-	-	-	-	0	32
9.	Eliška	Jordánková	-	-	-	-	-	-	0	28
10.	Eliška	Hybnerová	-	-	-	-	-	-	0	27
11.	Marek	Dobiáš	3	-	-	5	-	-	8	21
12.	Matouš	Řezníček	-	-	-	-	-	-	0	19

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	9	7	6	8	0	1	31	114
2.	David	Kamenský	2	0	6	8	6	1	23	104

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
3.	Vilém	Jankovský	3	7	6	8	0	1	25	99
4.	Jiří	Močkoř	3	4	3	6	0	5	21	96
5.	Veronika	Krčmáriková	-	0	6	7	0	1	14	72
6.	Matěj	Martiník	-	-	-	-	-	-	0	42
7.	Vojtěch	David	-	-	-	-	-	-	0	41
8.	Karolína	Štorchová	-	-	-	-	-	-	0	26
9.	Matěj	Volf	-	-	-	-	-	-	0	12

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Alina	Mojšová	9	0	6	5	0	1	21	86
2.	Jana	Kolenovská	-	2	6	8	6	1	23	70
3.	Jan	Kačenka	9	7	-	-	6	-	22	54
4.	Jakub	Michna	3	0	6	8	0	4	21	48
5.	Martina	Novotná	-	-	-	-	-	-	0	33
6.	Adam	Křivka	-	-	-	-	-	-	0	26
7.	Erika	Vladařová	-	-	-	-	-	-	0	7