

# KOKOS

29. ročník      ★      4. leták

## Milý řešiteli!

Blíží se konec školního roku a s ním přichází i poslední KoKoSová série. Ta definitivně rozhodne, kdo se umístí na prvních třech místech a zaslouží si tak pěkné ceny. Proto se snaž a ukaž co v tobě je, protože to stojí za to. Ale hlavně si to užij! Přejeme Ti pěkné čtení a počítání.

*Organizátoři*

## Zadání úloh

Po chvíli chůze narazila skupinka opět na vodu, tentokrát však nikde neviděli most. Rozhodli se tedy jít po proudu, jestli na něco nenarazí. Cesta jim ale zanedlouho začala připadat povědomá, načež zjistili, že jsou tam, odkud vyšli. Vydali se druhým směrem a po nějakém čase zase přišli k bodu, kde byl most. . . ten se ale mezitím zvedl zpátky a na jejich straně nebylo nic, čím by ho mohli spustit. Octli se tedy na ostrově bez možnosti úniku. „Tak to jsme docela v kaši, co budeme dělat?“ Barča začala propadat panice.

„Hlavní je zachovat klid. Navrhuju, abychom si pro zklidnění spočítali nějaký příklad, mi to vždycky pomůže,“ navrhl Jirka.

„To zní dobře,“ zaradoval se Max, a tak se do toho pustili.

**Úloha 1. (7 bodů):** Dokažte, že výraz  $6n^3 - 6n$  je dělitelný číslem 36 pro každé přirozené číslo  $n$ .

Počítání Barču trochu uklidnilo, ale kamarádi stáli před důležitějším problémem - neměli jak se z ostrova dostat dál. Rozhodli se ještě jednou projít po ostrově, jestli náhodou nenajdou něco, co by jim pomohlo dostat se pryč. To, co našli, však opravdu nečekali. Před nimi stál malý polorozpadlý amfiteátr.

**Úloha 2. (10 bodů):** V malém amfiteátru je 100 sedadel označených čísly 1-100. Na představení přišlo 100 lidí. Divák č. 1 nevěděl, že si má sednout na sedadlo s číslem 1, a sedl si na náhodné sedadlo. Každý následující diváků (2, 3, 4, . . .) si, pokud možno, sedl na své místo (2, 3, 4, . . .), jinak si vzal náhodně z neobsazených míst. Jaká je šance, že poslední divák (č. 100) si sedne na své místo (č. 100)?

„Můžete mi někdo říct, co dělá na ostrůvku v podzemí amfiteátr?“ zamračila se Kika. „To víš, podzemšťané taky potřebují nějaké kulturní využití,“ pokrčil rameny Jirka, „ale máš pravdu, kdyby radši počítali příklady...“ Ještě chvíli amfiteátr zkoumali, ale jelikož nic nenašli, přesunuli se znovu ke břehu. Tam je ale čekalo zvláštní překvapení. Směrem k nim plul člun, na kterém se vezla osamělá osoba.

Člun zakotvil u nich a vystoupil z něj mladík. „Ahoj, já jsem Kuba a přišel jsem vám pomoci.“ Ostatní stáli jako opáření a nechápali, co se děje. „Vidím, že nechápete, co se děje, ale to jsem čekal. Tak na vysvětlenou. Před nedávnem jsem dostal z Města zprávu, že konečně nastal čas poslat zdroj na cestu. Odsud byste se sami už dál nedostali, a tak jsem vám přišel na pomoc. Ale abych se přesvědčil, že jste to opravdu vy, budete muset projít mojí zkouškou...“

„To už je snad podesáté! Já tady ze sebe nebudu dělat šaška!“ naštvála se Barča. „Ale no tak, je to jen příklad, to zvládneš, určitě je to už naposledy,“ snažil se ji uchláchat Max. Barča se nakonec nechala přemluvit a tak mohli zkoušku podstoupit.

**Úloha 3. (7 bodů):** Kuba našel 101 po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet byl stejný jako součet 100 po nich následujících čísel. Které z čísel nalezených Kubou bylo nejmenší?

„Páni, tak skvělé řešení kromě toho svého jsem ještě nikdy neviděl! Možná taky protože jsem žádné jiné neviděl, ale to je teď jedno... svezu vás tedy na druhý břeh, a že jste to vy, rovnou vám ukážu i cestu k Jádru... tedy k místu, kam máte dopravit Zdroj...“ a tak se kamarádi nalodili a vypravili se vstříc temnotě.

Jelikož v podzemí neměl jak foukat vítr, hladina byla úplně klidná. Ve člunu panovalo zaražené ticho, které přerušil až Tomáš: „Ty jo, tohle ve mě vyvolává tolik vzpomínek! Třeba jak jsme šli nakupovat rafty...“

**Úloha 4. (6 bodů):** Tomáš, Jirka, Kika a Barča si šli koupit rafty. Tomáš řekl: „Můj raft stojí 5 620 Kč.“ Jirka řekl: „Můj raft stojí třetinu toho, co vaše rafty dohromady.“ Kika na to: „Můj raft stojí sedminu toho, co vaše rafty dohromady.“ A Barča řekla: „Můj raft stojí šestinu toho, co vaše rafty dohromady.“ Jaká je celková cena za rafty?

Nikdo ho ale neposlouchal, protože se před loďkou objevil druhý břeh. Když se vylo-dili, byli už příliš unavení na další cestu, čehož si jejich průvodce Kuba všiml a prohlásil, že by bylo lepší, kdyby si tady dali pauzu. Než se však uložili ke spánku, Jirka se vytasil s výzvou pro Kubu: „Když sis dal tolik práce s vymýšlením příkladu, tak jsem ti taky jeden vymyslel. Ale je to trochu jiná úroveň než ten tvůj, tak schválně, co zvládneš.“

**Úloha 5. (6 bodů):** Jirka položil pravidelný čtyřstěn o hraně délky 4 doprostřed kružnice o poloměru 6 (střed dolní podstavy čtyřstěnu leží na středu kružnice). Potom prodloužil strany dolní podstavy tak, aby protínaly kružnici. Jaká je vzdálenost těchto průsečíků od horního vrcholu čtyřstěnu?

Kuba s příkladem neměl žádné problémy a tak se všichni uložili ke spánku, Jirka poněkud zklamaně.

Vyspali se a znovu se vydali na cestu. Během ní si však začali všimnout, že namodralé světlo, které vyzařovaly krystalové žíly, jimiž byly stěny jeskyně protkány, začalo sílit. „Blížíme se ke konci cesty,“ prohlásil Kuba. A skutečně, o necelou hodinu později stáli před kamennou stěnou, na které byl podle očekávání vyrytý příklad.

**Úloha 6. (6 bodů):** O přirozeném čísle ( $a$ ) byla vyslovena čtyři tvrzení:

-Číslo ( $a$ ) je dělitelné 5.

-Číslo ( $a$ ) je dělitelné 11.

-Číslo ( $a$ ) je dělitelné 55.

-Číslo ( $a$ ) je menší než 10.

Urči číslo ( $a$ ), jestliže víš, že právě dvě tvrzení jsou pravdivá.

Ten už se nikomu nechtěl řešit, a tak vytáhli Barčinu sbírku a prolistovali ji. Příklad v ní ke svému nadšení našli a řešení ve sbírce se ukázalo jako správné, a tak mohli rychle postoupit k finálnímu úseku jejich poutě.

Modrá záře už začínala být až nesnesitelně jasná, když se před nimi tunel otevřel v nevelkou místnost. Vypadalo to, že do ní původně vedlo několik vchodů, všechny ostatní teď ale byly zavalené. Uprostřed místnosti se nacházelo pár kamenných podstavců, ne nepodobných tomu, kde ve Městě původně spočíval Zdroj. Některé z podstavců byly zaplněny předměty podobnými Zdroji, zářil však jen jeden z nich a i jeho záře byla o mnoho slabší, než záře Zdroje, který měli kamarádi u sebe.

Jirka vytáhl Zdroj z batohu a bez většího přemýšlení ho položil na nejbližší podstavec. Celá místnost se rozzářila oslepujícím světlem a začala se třást. V tu samou chvíli se země rozevřela a celou skupinku pohltila.

*Řešení úloh 4. série pošlete do 7.6.2017 na známou adresu:*

KoKoS

Gymnázium Mikuláše Koperníka

17. listopadu 526

743 11 Bílovec

## Autorská řešení 3. série

### Úloha 1.

Označme si body dotyku úseček s kružnicemi písmeny  $A$  až  $F$ . Nejprve vypočítáme velikost úhlu  $|\sphericalangle EFA| = 180 - 2\delta = 140^\circ$ . Podle věty o obvodových úhlech víme, že  $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ACE| = 180^\circ - |\sphericalangle EFA| = 40^\circ$ , proto  $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle ABD| - |\sphericalangle ABE| = 50^\circ$ . Úhel  $\alpha$  dopočítáme pomocí trojúhelníku  $PBD$ .

Úhel  $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - |\sphericalangle EBD| = 40^\circ$ . (viz. obr. níže)

*Bára*

### Úloha 2.

Protože úhel  $ABC$  je obvodový úhel náležící tětivě  $AB$ , bude mít poloviční velikost než středový úhel  $ABS \Leftrightarrow |\sphericalangle ACB| = 60^\circ$ . Potom  $|\sphericalangle DCB| = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$ , a protože součet protějších úhlů v tětivovém čtyřúhelníku je roven  $180^\circ$ , tak  $|\sphericalangle BAD| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Velikost úhlu  $BAD = 80^\circ$ .

*Jirka*

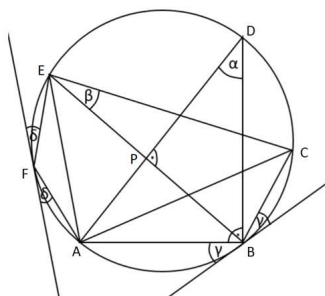
### Úloha 3.

Obvodové úhly  $KML$  a  $KNL$  leží na stejném oblouku kružnice, tudíž se jejich velikosti rovnají. Jelikož  $KML = KLM$ , pak  $KLM = KNL$ . Trojúhelník  $KNL$  je tedy rovnoramenný s rameny  $KL$  a  $KN$ , z čehož vyplývá, že  $|KN| = 5$ .

Velikost úsečky  $KN = 5$ .

*Kuba*

### Úloha 4.



Označme středy stran  $CD$ ,  $CE$  postupně jako  $F, G$ . Jelikož  $|\sphericalangle FSC| = 45^\circ$ , tak  $|\sphericalangle FGC| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ . (z vlastnosti tětiového čtyřúhelníku)  $FG$  je střední příčkou v trojúhelníku  $DCE$ , tudíž úsečky  $DE$  a  $FG$  jsou rovnoběžné, tzn.  $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle FGC| = 135^\circ$  a protože  $DCE$  je rovnoramenný trojúhelník, tak snadno dopočteme velikosti zbývajících úhlů:  $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle ECD| = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 22,5^\circ$

Úhly mají velikosti  $|\sphericalangle DCE| = 135^\circ$ ,  $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle ECD| = 22,5^\circ$

*Bára*

### Úloha 5.

V trojúhelníku dopočteme velikost úhlu  $CEB$ .  $|\sphericalangle CEB| = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ , tzn. trojúhelník  $EBC$  je rovnoramenný, neboli  $|EC| = |BC| = |BD|$ . Čtyřúhelník  $BCDF$  je tudíž pravidelným lichoběžníkem, tedy i tětiovým čtyřúhelníkem. (součet protilehlých úhlů je roven  $180^\circ$ )

Čtyřúhelník  $BCDF$  je tětiovým čtyřúhelníkem.

*Nagyn*

### Úloha 6.

Čtyřúhelník  $ABMN$  je tečnový, proto pro délky jeho stran musí platit:

$$|AB| = |AM| = |MN| = 9\text{cm} \quad (1)$$

Z tohoto vyplývá, že čtyřúhelník  $ABMN$  je čtverec nebo kosočtverec a proto nelze zadaný trojúhelník sestrojít.

*Jirka*

## Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

### 6. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>S</i>	$\Sigma$
1.	Michal	Weinert	7	1	7	-	-	-	15	15
2.	Natálie	Jindrová	-	-	-	-	-	-	0	13
3.	Hoang Minh	Weinert	-	-	-	-	-	-	0	11
4.	Natálie	Tremlová	-	-	-	-	-	-	0	6

### 7. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>S</i>	$\Sigma$
1.	Anna	Hronová	-	-	-	-	-	8	8	92
2.-3.	Adéla	Houdková	-	5	1	-	1	-	7	60
	Kateřina	Julie Sedláčková	-	-	-	-	-	-	0	60
4.	Zuzana	Krčmáriková	-	-	-	-	-	-	0	36
5.	Dalimil	Šťastný	-	-	-	-	-	-	0	24
6.	Vojtěch	Kubala	-	-	-	-	-	-	0	22
7.	Silvia	Assenza	-	-	-	-	-	-	0	18
8.	Eduard	Grňa	-	-	-	-	-	-	0	16
9.	Eliška	Drongová	-	-	-	-	-	-	0	11

### 8. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>S</i>	$\Sigma$
1.	Martin	Mlečka	2	5	1	6	5	8	27	95
2.	Hana	Rusinová	-	5	9	6	0	-	20	91
3.	Vojtěch	Zeman	-	-	-	-	-	-	0	65
4.	Monika	Anderlová	1	5	9	6	4	-	25	60
5.	Adéla	Anderlová	1	5	9	6	4	-	25	59
6.	Hana	Pasková	-	-	-	-	-	-	0	27
7.	Lucie	Chromečková	-	-	-	-	-	-	0	26
8.	Nikola	Razakowská	-	-	-	-	-	-	0	10

**9. ročník**

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>S</i>	$\Sigma$
1.	Natálie	Maleňáková	7	5	9	6	5	8	40	122
2.	Jana	Čákorová	7	5	9	6	5	8	40	119
3.	Veronika	Krčmáriková	7	0	5	6	5	-	23	95
4.	David	Kamenský	-	-	-	-	-	-	0	81
5.	Michaela	Peterková	-	-	-	-	-	-	0	80
6.	Anna	Lorencová	-	-	-	-	-	-	0	72
7.	Zuzana	Lukovicsová	-	-	-	-	-	-	0	66
8.	Dominik	Musial	-	-	-	-	-	-	0	65
9.	Michal	Štaš	-	-	-	-	-	-	0	62
10.	Tereza	Halámková	-	-	-	-	-	-	0	41