KOKOS

30.ročník ⋆ 2.leták

Podzim je v plném proudu, dny se stále zkracují a s nimi i čas, který zbývá do Vánoc. Abychom Ti zkrátili čekání, přinášíme Ti předčasný dárek – novou várku příkladů na dlouhé večery! Přejeme Ti dobrou náladu v podzimních dnech a těšíme se na Tvé řešení

Zadání úloh

V den výstavy „Nejlepší bílovecké matematické úlohy století“ se Bětka cítila velice nervózní. Měla jít odpoledne na vernisáž s Aloisem, ale bála se, že tam bude jediná nevzdělaná v tajemných uměních matematiky. Aby se trochu uklidnila, pozvala Aloise a pár spolužáků na hranolky na Besedu, oblíbenou restauraci místních studentů. Když však do restaurace dorazili, zjistili, že jídlo na Besedě podražilo!

Úloha 1. (7 bodů):
Ještě minulý týden šli na Besedě koupit jedny hranolky a 0,5 l kofoly za sto korun, ale teď v restauraci zvýšili ceny o 30 %, za sto korun lze koupit pouze 0,25 l kofoly a hranolky.
Co hůř, za měsíc se bude zdražovat znovu o dalších 30 %. Bude si pak Bětka moct koupit za sto korun alespoň hranolky?

Když byli všichni uprostřed výpočtů a bez sebe strachy, že budou muset změnit restauraci, naštvala se najednou Bětka: „K čertu s váma, to musíte matematiku tahat i k jídlu? Já si chtěla před výstavou alespoň trochu odpočinout!“

„Ale no tak, taková hrůza to není,“ smáli se ostatní. „Ale jestli chceš, můžeme se bavit o něčem jiném.“ Debata se tedy přesunula na jiné téma, bohužel, ne na dlouho.

Všichni brzy zjistili, že jejich kofola má špatnou teplotu! Kdo by chtěl pít teplou kofolu? Vášnivá diskuze se tak brzy stočila od správné teploty kofoly na rozdíly měření teploty ve světě.

Úloha 2. (7 bodů):
Určete teplotu, při které je údaj Fahrenheitovy stupnice stejný jako v Celsiově.

„Vy pokoj prostě nedáte,“ trucovala Bětka. „Když se té vaší matiky nezbavím, tak pojďme už na výstavu, za chvíli začíná vernisáž.“ Spokojení po hranolkách a kofole vydali se všichni na vernisáž, která se konala v aule gymnázia.

V rámci programu ochrany přírody začala výstava hromadnou ekologickou úlohou.

Úloha 3. (6 bodů):

Petr osadí paseku stromky sám za 9 hodin. Jirka by tuto práci provedl za 12 hodin a Milan za 18 hodin. Po 2 hodinách přišel Petrovi na pomoc Jirka a po další hodině také Milan. Za kolik hodin byla celá paseka osázena stromky?

Bětka se zoufale snažila úlohu vyřešit, ale škrtala už třetí postup, zatímco všichni ostatní měli dopočítáno. Měla téměř na krajíčku, cítila se oproti všem ostatním hloupá a Alois se na ni už nemohl dívat: „Kašli na to, nemá cenu se s touhle úlohou trápit, najdeme ti nějakou jinou.“ Vydali se tedy na procházku výstavou. „Hele tahle by se ti mohla líbit. Čteš ráda ty knížky o upírech, ne?“

Úloha 4. (7 bodů):

Upíří rodinka žije již mnoho let. Pokud sečteme věk Karla, Edy, Alenky a Arabely, dostaneme číslo 702. Kolik je Alence? Platí:

- Karlovi je méně než 400 let, ale více než je jedna polovina součtu věků členů rodinky.
- Ciferný součet Karlova věku je 17 a obsahuje pouze liché cifry.
- Karlův věk je dělitelný pěti.
- Edův věk je polovina rozdílu Karlova věku a jedné.
- Arabele je jedna desetina rozdílu Edova věku a 7.

A vskutku, tohle téma se Bětce líbilo. Sice jí to pořád trvalo dost dlouho, ale nakonec úlohu správně vyřešila. „Ha, nakonec nebudu úplně hloupá!“

„No vidíš,“ zasmál se Alois, „ani to tolik nebolelo. Zkus nějakou geometrii, třeba se ti bude líp uvažovat o něčem co si můžeš nakreslit.“

Úloha 5. (7 bodů):

Vojta nakreslil rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny AC a BC. Dále si označil středy stran AB a AC pořadě jako K a L. Víme, že velikost výšky procházející vrcholem A v trojúhelníku AKL je 3 cm. Určete velikosti všech úhlů v trojúhelníku ABC, pokud délka strany BC je 7 cm.

Alois byl velice mile překvapen, Bětka měla úkol vyřešený během pár minut. Že by z ní nakonec matematika opravdu udělal? Bětka sama jenom zářila. „To byla dokonce i zábava! Pojďme najít nějaké další geometrické úlohy!“

Zbytek odpoledne nestíhal Alois kulit oči, Bětka pobíhala od jedné úlohy k druhé jako splašená fretka, dokonce řešila i úlohy, na které by si Alois netroufl. „Dej si na chvíli pauzu od geometrie, matematika obsahuje i jiné úlohy.“

„Máš pravdu,“ zamyslela se Bětka. „Najdi mi nějakou jinou úlohu, třeba mi teď půjde líp.“

Úloha 6. (8 bodů):
Kolik trojciferných čísel má tu vlastnost, že pokud zaměníme 1. a 3. číslici a nové číslo odečteme od původního, tak nám vyjde 99? (1. ani 3. číslice nemohou být 0.)

S touhle úlohou se Bětka trochu natrápila, ale vyřešila ji s radostným výkřikem: „Mám to!“

„Tak vidíš, trocha toho matematického uvažování se o tebe otřela,“ vtipkoval Alois.

Bětka se nejdříve také smála, ale pak si uvědomila tu strašnou pravdu, před kterou nebylo úniku. Začala ji bavit matematika.

*Řešení úloh 2. série posílejte do **4.12.2017** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

Pro aritmetický průměr platí:

$$\frac{\text{součet známek}}{\text{počet známek}} = 4,15,$$

$$\text{součet známek} = 4,15 \cdot \text{počet známek} = \frac{83}{20} \cdot \text{počet známek},$$

z toho plyne, že počet známek je násobkem dvaceti. Protože třetina známek byly pětky, musí být počet známek rovněž násobkem čísla 3.

Počet známek je tedy násobkem čísla 60.

a) Kdyby měla Bětka 60 známek, bylo by

$$60 \cdot 4,15 = 249.$$

Odečteme-li 4 jedničky a 20 pětek (tj. 104), zbývá 145 na 36 známek. I kdyby to byly samé čtyřky, bylo by to méně než 145 ($36 \cdot 4 = 144$).

b) Kdyby měla Bětka 120 známek:

$$120 \cdot 4,15 = 498.$$

Odečteme-li 4 jidničky a 40 pětek, zbyde 294 na 76 námek. To lze splnit ($294 : 76 \doteq 3,9$), např 10 trojek a 66 čtyřek.

Bětka musela minulý rok dostat minimálně 120 známek.

Max

Úloha 2.

Nejprve si určeme, kolik bude malých trojúhelníků v první řadě velkého trojúhelníku. Po 1. kroku jich je: $2 \cdot 2 - 1$, po 2. kroku se počet změní na: $2 \cdot 2^2 - 1$ a po 100. kroku to tedy bude: $2 \cdot 2^{100} - 1$. Dále si můžeme všimnout, že v každé řadě velkého trojúhelníku bude počet malých trojúhelníků menší o 2 než v řadě předchozí. Hledaný počet malých trojúhelníků můžeme tudíž napsat následovně a pokud sečteme první a poslední člen řady, druhý a předposlední člen řady a tak dále, pak můžeme součet napsat zkráceně:

$$(2 \cdot 2^{100} - 1) + (2 \cdot 2^{100} - 3) + (2 \cdot 2^{100} - 5) + \cdots + 5 + 3 + 1 = (2 \cdot 2^{100} \cdot \frac{2^{100}}{2})$$

Čímž se dostáváme k výsledku, který lze zapsat jako 2^{200} nebo 4^{100} .

Jiří

Úloha 3.

Jak známo, pravděpodobnost se spočítá jako $\frac{\text{počet vyhovujících případů}}{\text{počet všech případů}}$. Počet možných hodů, kdy se součet na kostkách rovná 14, je 146 (viz. tabulka – součet čísel v pravém sloupci). Jelikož máme 6 čísel, která mohou padnout na každé kostce, je celkový počet možných hodů roven $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$.

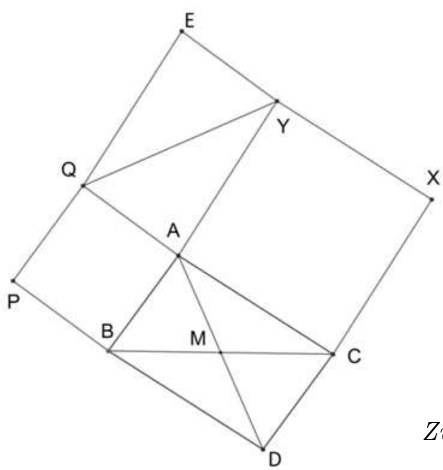
čísla, jejichž součet je 14	počet pořadí, ve kterém mohou padnout
1, 1, 6, 6	6
1, 2, 5, 6	24
1, 3, 4, 6	24
1, 3, 5, 5	12
1, 4, 4, 5	12
2, 2, 4, 6	12
2, 2, 5, 5	6
2, 3, 3, 6	12
2, 3, 4, 5	24
2, 4, 4, 4	4
3, 3, 3, 5	4
3, 3, 4, 4	6

Proto bude výsledná pravděpodobnost odpovídat hodnotě $\frac{146}{6^4}$.

Barča

Úloha 4.

Doplňme si trojúhelníky ABC a AQY na rovnoběžníky, jako na obrázku. Pak můžeme říct, že oba vzniklé rovnoběžníky jsou shodné, protože se shodují v délkách stran ($|AY| = |AC|$ a $|AB| = |AQ|$) a ve velikosti vnitřního úhlu u vrcholu A. Jedna z vlastností rovnoběžníku je, že se úhlopříčky půlí. To v našem případě znamená, že $2 \cdot |AM| = |AD| = |QY|$, což jsme chtěli dokázat.



Zuzka

Úloha 5.

Výraz $P_{(p)} = p^4 - 5p^2 + 4$ lze rozložit na $(p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+2)$. Výraz můžeme vynásobit prvočíslem $p > 5$. Dostáváme součin po sobě jdoucích čísel, to znamená, že je celý výraz dělitelný číslem 5, dále je dělitelný devíti(dvakrát třemi) a $(p-1)$ a $(p+1)$ je každé dělitelné 2 a jedno dokonce 4. Celková dělitelnost kterou máme dokázanou je $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Výraz $P_{(p)}$ je vždy dělitelný číslem 360 a tudíž možné zbytky při dělení 720 jsou 0 a 360. Když jsme vynásobili na začátku výraz prvočíslem p, nezměnili jsme jeho zbytky pří dělení 720.

Kuba

Úloha 6.

Královská rodina může uniknout následujícím způsobem:

1. Pustíme truhlici dolů volným pádem.
2. Dále pošleme dolů prince a truhlici vyvezme nahoru.
3. Jako další půjde dolů královna a princ se vrátí nahoru.
4. Zase pustíme truhlici volným pádem dolů.
5. Královna s truhlicí pojede nahoru a dolů se sveze král.
6. Dále opakujeme kroky od 1 do 4, takže pustíme truhlici dolů, pak dostaneme dolů prince, následně ho vyvezme zpátky a svezeme dolů královnu a nakonec znovu pustíme truhlici dolů.
7. V posledním kroku truhlici vyvezeme nahoru a princ sjede dolů.

Matěj