KoKoS

23.ročník ⋆ **3.leták**

Podzimní soustředění

Milý řešiteli, abychom Ti ještě více přiblížili náš korespondenční seminář KoKoS a zároveň ocenili Tvou snahu, připravujeme pro Tebe (a další řešitele) jarní soustředění! Jedná se o 6 dnů vyplněných zábavou, hrami, a také přednáškami o zajímavých zákoutích matematiky, kam jsi třeba ještě nikdy nezabloudil.

Ve dnech 11. února – 18. února (jarní prázdniny Moravskoslezského kraje) na tebe čeká nabitý program a spousta nových přátel ze semináře. Soustředění se již tradičně koná v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci, a to pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

Cena, pro letošek stanovená na 500 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Pokud máš jakékoliv otázky, neváhej se obrátit na náš email *gmkkokos@seznam.cz*, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na *http://kokos.gmk.cz/soustredeni-prihlaska*. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

Organizátoři

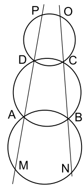
Zadání úloh

Ve druhé sérii jsme se dozvěděli jak se Billy vůbec ocitnul ve Willy. Byla to jeho nezadržitelná touha po úspěchu a lákavá představa hromady vydělaných peněz, která jej dovedla až na náměstí ve Willy. Ona spíše Princezna skřítků vyloudila vesele cinkavý praskot, který k její neskonalé radosti přenesl Billyho přímo do ulic Willy. Slibovala si, že ostřílený obchodní cestující vyvede obyvatele jejího království ze zaběhnutých rituálů a přinese do jejího světa trochu netradičních zážitků a vzrušení. Teď však trpce skřípá zoubky, protože Billyho ověřené taktiky naprosto selhávají. Chudák musel nouzově přespat u zamrzlé kašny, aby načerpal ztracené síly po velmi neúspěšném obchodním dni.

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 11 Bílovec

Tak jako se v mžiku setmělo, tak bleskurychle se světlo rozhodlo opět vrátit do ulic Willy. Ze všudypřítomných bedýnek rozhlasu se rozlinulo ohlušující přání dobrého rána a do přilehlých domků se jako na povel vrátil život. Tato strojová přesnost Billymu připomněla staré dobré časy a vykouzlila na jeho tváři drobný úsměv. Vstal, sebral ze země své brožurky a trochu smetl prach ze svého kabátu.

Úloha 1. (7 Bodů): Billy si všiml, že prach se na zemi seskupil do zajímavého obrazce. Jasně rozpoznal 3 kružnice o rozdílných poloměrech, jejichž středy ležely na jedné přímce. Na obrazci byly také dvě různoběžné sečny (pojmenoval si je p, q), z nichž každá protínala 3 kružnice. Billy si všiml, že všechny čtyři body, ve kterých se kružnice protínají (body A, B, C, D), ležely na sečnách (viz obrázek). Sečny také protínaly první a třetí kružnici v dalších čtyřech bodech (M, N, O, P). Billyho zajímalo jestli tyto čtyři body leží na jedné kružnici. A to bude také vaším úkolem.



Led ve fontáně opět roztál, takže mohla Billymu posloužit jako lavor k ranní hygieně. Dobře naladěn se rozhodl opustit tuto část vesnice a vydat se prudkým svahem dolů k něčemu, co zdánlivě připomínalo řeku.

Cesta se svažovala opravdu prudce dolů a nikoho nenapadlo zkusit jí stočit do klikatých serpentin, aby snad byla o malinko pohodlnější. Billymu se zdálo, že každou chvíli se musí jeho palce proklubat skrz špičky bot, jak neustále sjížděly směrem dolů.

Úloha 2. (5 Bodů): Právě proto Billyho překvapilo, když na cestě spatřil dva stánky s kaktusy. V rychlosti stačil postřehnout, že se v těchto dvou stáncích prodávají 4 druhy kaktusů – žluté, zelené, modré a vzácné fialové. Průměrná hmotnost žlutých kaktusů je 100 g, zatímco průměrná hmotnost zelených kaktusů je 150 g. Průměrná hmotnost modrých kaktusů je průměrem průměrných hmotností všech žlutých a zelených kaktusů. Fialových kaktusů jsou dva druhy – velké a malé. Velký fialový kaktus váží 2x tolik, co průměrný žlutý. Hmotnost malého fialového kaktusu je průměrem hmotnosti velkého fialového kaktusu a zeleného kaktusu.

V prvním stánku – Strmém Stánku, se prodávají fialové a žluté kaktusy, ve druhém stánku – Stánku U Cesty, se prodávají zelené a modré kaktusy. 1 g žlutého kaktusu stojí 5 Kč, zeleného 2 Kč, modrého 3 Kč, fialových 15 Kč. Ve Strmém Stánku se prodalo 10 žlutých kaktusů, 2 fialové velké kaktusy, 5 fialových malých kaktusů. Ve Stánku U Cesty se prodalo 50 modrých kaktusů a 13 zelených kaktusů. Kolik minimálně kaktusů by se ještě muselo prodat ve Stánku U Cesty, aby vydělal více, než Strmý Stánek?

Čím více se blížil k řece, tím byla pěšinka promáčenější, až se Billymu smekly nohy a cestička se k jeho nelibosti proměnila v klouzačku. Jak neustále zrychloval a obaloval se bahnem, začal jej trápit způsob zakončení jeho odvážné cesty. Skutečně v nejbližších vteřinách se muselo neodkladně ozvat hluboké žbluňk a zlověstné zavření hladiny. Voda v řece byla překvapivě čirá na to, jak blátivým korytem se vinula. Než si Billy stačil vzpomenout, jak se používají ruce a nohy k plavání, byl chycen za krk a prudce vytažen z vody. Nijak se nebránil, přeci jen to bylo méně namáhavé než se sám snažit vyškrábat na uklouzaný břeh. Méně nadšený byl ze způsobu, jakým byl hozen na vlastní nohy a už vůbec se mu nelíbil výraz zachráncovy tváře.

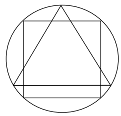
Když se řekne troll, člověk si vybaví neohrabané přerostlé stvoření ze skandinávských mýtů a pověstí. Tady však byla veškerá představivost krátká. Na Zemi se ještě nenašel sběratel lidových pověstí, který by se odvážil do svých vyprávění umístit něco tak velikého a tupého. Chvíli tak na sebe s Billym zírali, a protože obchodník se neopovážil ani pohnout, začal troll cedit skrze zuby jednoduché sdělení: „Ty chtít přes vodu, ale ty neplatit, já chytit tě a chtít peníze.“

Úloha 3. (9 Bodů): Pro odlehčení děje jsme se rozhodli Vám nyní nabídnout příklad: Na stoleček ve tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s odvěsnou 10 cm si Bára rozmístila 5 žlutých puntíků. To jí ale připadalo málo, tak tam rozmístila ještě 3 krát tolik zelených a 5 krát tolik modrých. Nakonec přidala dalších 5 červených puntíků. Dokažte, že při libovolném rozmístění puntíků existuje trojúhelník s obsahem 2cm^2, takový že obsahuje buď alespoň 3 puntíky jedné barvy nebo puntíky alespoň dvou různých barev.

Ač se to zdá býti poněkud hazardní, Billy byl z této kostrbaté věty jako u vytržení. Našel v ní náznak obchodního zájmu, který byl jeho povaze tak blízký a i když neměl ponětí, čím trollovi zaplatí, začal se na něj bohulibě usmívat. To trolla poněkud zmátlo. Co si pamatoval, poslední živá duše, ze které chtěl vymámit mýtné, v sobě znenadání nalezla tolik energie, že ve vteřině vyběhla sráz zpět nahoru. V záchvatu paniky, že něco pokazil, se křečovitě chytil toho jediného, co uměl a zopakoval svůj požadavek zase znova. Billy byl však tak šokován, že se neopovážil vzdát se své taktiky milého úsměvu. Takto se celá scéna odehrála ještě mnohokrát, protože obchodník byl ochromen strachem a troll svou prostoduchostí.

Po chvíli dostal Billy křeč do tváře a jeho úsměv se pomalu ale nezadržitelně měnil v prapodivný úšklebek nemluvě o tom, že ze stále se omílající trollovy věty ho parádně rozbolela hlava. K tomu všemu si s bolestí uvědomil, že naposledy snědl sotva lžičku vývaru v lidské kantýně, a tak z ničeho nic na trolla vypálil, jestli by neměl něco k jídlu. Byl to akt spíše zoufalství než odvahy, ale už tak zblblý troll jej přestal zvedat za límec do výšky a postavil jej zase rovnýma nohama na zem. „Mám,“ zněla překvapivá odpověď a troll se odšoural pod mostní pilíř, kde měl pravděpodobně své obydlí. Až teď si Billy uvědomil, na co to celou dobu přes trollovo ucho zíral. Byl to most, který měl původně spojit oba břehy řeky, jenže byl budován s příliš velkorysým zdobením a jakmile architektovi došly nápady, rázně most ukončil a to zhruba v polovině toku.

Úloha 4. (6 Bodů): Jedním z mnoha motivů vyskytujících se mezi zdobením mostu byla kružnice s poloměrem 4 cm, do které byl vepsán čtverec a rovnostranný trojúhelník (viz obrázek). Určete poměr mezi obsahem trojúhelníku a obsahem čtverce.



To už se však troll vracel s pořádnou kýtou v jedné ruce a velikánským pecnem chleba v druhé. Tomu se říká pořádná svačina, pomyslel si Billy a už se mu začaly sbíhat sliny. Trolla také uklidnila vůně upečeného masa, utrhl kus pro Billyho a společně si sedli na břeh řeky. Kusy masa s mlaskáním do Billyho přímo padaly, jak byl vyhladovělý.

Nebylo toho moc, co se trollovi honilo hlavou, ale tíživou myšlenku, že zkazil vybírání mýtného, vystřídal příjemný pocit z plnícího se žaludku. Pozoroval Billyho, jak v něm maso rychle mizí, a vzpomněl si na svou maminku, která mu vždycky říkala, že jací jsou lidé do jídla, takoví jsou do práce. On sám byl do jídla jako drak, a proto se považoval za skvělého pracanta. Jen kdyby mu tak ti lidi chtěli chodit přes most, aby mohl pořádně vybírat mýtné. Celý tumpachový z přívalu převratných myšlenek v sobě pocítil nutkání celé své trápení svěřit Billymu. Vždyť on taky jí jako drak, to by si mohli rozumět.

Úloha 5. (5 bodů): Billy se při jídle nechal unášet myšlenkami na Zemi. Vzpomněl si na jednu bankovní loupež, o které kdysi slyšel v televizi. 12 lupičů tehdy vykradlo banku. Ukradli určitou sumu peněz, kterou si chtěli rovnoměrně rozdělit mezi sebe. Museli však odvést daň 15 procent Bossovi podsvětí. Navíc se o svůj díl z ukradených peněz přihlásili také 3 další lidé – popelář, řidič a hodinář. Po tom, co se ukradená suma peněz rovnoměrně rozdělila mezi všech 15 spolupachatelů, si původních 12 lupičů všimlo, že zdaněním a vyplacením odměny pro popeláře, řidiče a hodináře přišli každý o 480 Kč. Jaká suma peněz byla ukradena?

Billymu málem zaskočilo, když ze sebe troll začal soukat jednu holou větu za druhou. Nejprve pojal podezření, že si vzpomněl na výběr peněz a dostal strach, aby se celá situace s hloupým usmíváním zase nezačala opakovat. Zaposlouchal se však do trollova vyprávění a musel ocenit námahu s jakou se snažil vybírat do vět ty správné podměty a přísudky. Začátek příběhu byl poněkud zmatený, ale Billy odtušil, že se mu troll snaží vylíčit své strastiplné dětství. Bylo v něm spousta citoslovcí vyjadřujících posměšky dětí dávajících jasně najevo, že s někým tak neohrabaným si hrát rozhodně nebudou. Pak přišel pravděpodobně pokus naučit se nějakému řemeslu, ale skončil předpokládaným nezdarem. Troll celé své vyprávění náležitě prožíval a po chvilce Billyho pohltila nekonečná beznaděj. Už to vypadalo, že se v příběhu nenajde světlý bod, když v tom se z ničeho nic zjevila ONA. Troll to popsal asi takto: „Malá, křehká pila kakao udělalo cink a ptát se mě, jestli chci práci. Jasňačka, že chci, já na to. Tak být tady a chtít peníze, když chce někdo přes most. Jenže on nikdo nechtít jít a já bát, že zase to udělá cink a ona práci vzít. Já nevědět, co pak dělala.“ Ten drobný moment, kdy se začal příběh obracet k lepšímu, připadal Billymu podivně povědomý.

Billy nebyl zdaleka prvním pokusem, kdy se Princezna pokoušela trochu rozptýlit.

Úloha 6. (8 Bodů): Nejprve se zkoušela zabavit matematikou. Ale narazila na jeden vážně těžký příklad: Na tabuli jsou napsaná čísla 1, 2, 3, …, 100. Vyberou se nějaká dvě z nich, která se z tabule smažou, a místo nich se napíše jejich součet. Po chvíli takovéhoto mazání a připisování, na tabuli zbyde 5 po sobě jdoucích čísel. Úkolem je určit tyto čísla. Princezně se na úlohu přijít nepodařilo a po tomto neúspěchu se na matiku naštvala a nechtěla se jí dále zaobírat. Vám se snad povede lépe…

Princezna už si přesně nepamatovala, čím pak pokračovala, ale s přibývajícími nezdary byla stále více odhodlanější dovést svůj plán do konce. Jednoho dne, dávno před nápadem s obchodním cestujícím, jí přišlo docela zábavné přesvědčit mohutného trolla, aby vybíral na rozestavěném mostě mýtné. Hlupáček, nabídku s nadšením přijal. Nejen, že si neuvědomil, že most vůbec nespojuje břehy řeky, ono mu dokonce nedošlo, že všechna stvoření ve Willy mají křídla a žádný most přes vodu prostě nepotřebují. Kdyby je náhodou něco donutilo opustit svá bydliště, jednoduše mávnou křídly a s lehkostí se přemístí tam, kam to zrovna potřebují.

Chvíli Princeznu bavilo pozorovat nešťastného trolla, který vyhlížel kolemjdoucí, aby pod pohrůžkou dubové palice mohl vybrat vstup na most, ale po čase byla podívaná poněkud jednotvárná. Jednoduše se nikdo nikdy nezjevil. Čekala, že se troll naštve, sebere odvahu a vyběhne zpátky do vesnice. Tam by mohl vyburcovat všechny obyvatele, nahnat je k řece a nechat za poplatek štrádovat po mostě. To by bylo určitě něco pro Princezniny oči, ale přiznejme si, celý plán je poněkud komplikovaný, aby jej mohl vymyslet někdo jako troll. Tak tedy nechala trolla svému nešťastnému osudu a pustila se do vymýšlení jiného rozptýlení.

Když potkáte někoho, kdo je v podobné šlamastyce, jako jste vy, docela vám to zlepší náladu. To samé teď pociťoval Billy. Nejen, že se královsky najedl, ale trollovo vyprávění mu vlilo do žil novou energii. Bude to trvat ještě notnou chvíli, než Billy plně pochopí, co s ním v tomto divném světě kdo zamýšlí, ale momentálně byl pevně odhodlán k činu. Takový troll s dubovou palicí, to je pádný argument k tomu, aby močálníci Billyho alespoň vyslechli. Tady totiž vůbec nejde o to prodat místním nějaký počítač, ale dostat se jim na kobylku a k tomu potřebuje místního průvodce.

Troll už dojetím nad svým vlastním osudem málem plakal, zato Billymu se v hlavě formoval smělý plán. Vytáhl z kufru bílou čtvrtku papíru, na kterou napsal: MÝTNÉ DO KASIČKY!!! a přesvědčil trolla, že teď může klidně odejít, protože jeho kasičku vylepšil, tak že je schopna vybírat penízky sama. Troll byl zprvu poněkud skeptický k nové technologii, ale když mu Billy dovolil na cedulku ještě připsat: NEBO PALICE!!!, byl ochotný most opustit.

Přebrodili vodu a ve dvou se vydali zpět do vesnice. Billy si od spojenectví s trollem sliboval velký obrat v obchodní sféře, kdyby nic tak už nemusí nést své kufry.

*Řešení úloh 3. série posílejte do **31.1.2011** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 2. série

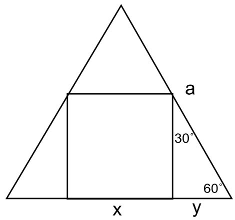
Úloha 1.

Použijeme metodu obarvování. Obarvíme si tedy tuto čtvercovou síť jako šachovnici. Poté vidíme, že kostička tvaru „L“, se skládá ze dvou bílých a dvou černých políček. Stejně tak je to i u tvaru „Z“. Ale kostičku tvaru „T“ lze obarvit dvěma způsoby, buď je z 1 bílého a 3 černých políček nebo ze 3 bílých a 1 černého políčka. Pokud na šachovnici (z 50 černých a 50 bílých políček) položíme lichý počet kostiček tvaru „T“, pokryjeme tím vždy lichý počet černých a lichý počet bílých políček. Na šachovnici nám zbude tedy lichý počet černých i bílých políček. Nyní můžeme pokládat jen kostičky tvaru „L“ a „Z“, tím ale vždy pokryjeme sudý počet černých i bílých políček. Nikdy tedy nejsme schopni pokrýt celou šachovnici.

Pája

Úloha 2.

Dopočítáme vnitřní úhly malého trojúhelníku vedle čtverce. Poté využijeme funkci tangens a vyjádříme délku strany x.



$$tg60^\circ = \frac{x}{y}$$
$$y = \frac{x}{tg60^\circ}$$

Dosadíme do $a = 2y + x$

$$a = 2 \cdot \frac{x}{tg60^\circ} + x$$
$$a = x \cdot \left(\frac{2}{tg60^\circ} + 1\right)$$
$$x = \frac{a}{\frac{2}{tg60^\circ} + 1}$$

Pokud známe stranu čtverce můžeme spočítat jeho obsah:

$$S = x^2$$

$$S = \left(\frac{a}{\frac{2}{tg60^\circ} + 1} \right)^2$$

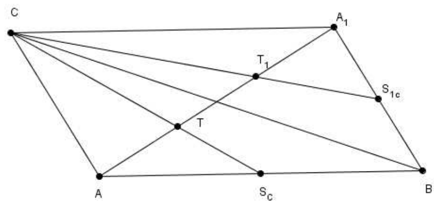
$$S = \left(\frac{a}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 1} \right)^2$$

Jsou možné i další úpravy výsledku, i další možné postupy.

Marťa

Úloha 3.

Budeme vycházet z konstrukce trojúhelníku, pomocí délky těžnic. Takový trojúhelník sestrojíma tak, že ho doplníme na rovnoběžník (viz obrázek).



Jestliže existuje trojúhelník CTT_1 pak existuje i trojúhelník ABC. Platí:

- $|AT| = |T_1A_1| = \frac{2}{3}t_a \Rightarrow |TT_1| = \frac{2}{3}t_a = 1\frac{1}{3}$
- $|CT| = \frac{2}{3}t_c = 3\frac{1}{3}$
- $|CT_1| = \frac{2}{3}t_b = 2\frac{2}{3}$

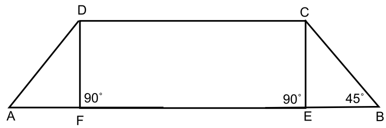
Nyní už stačí jen pomocí trojúhelníkové nerovnosti ukázat, že takovýto trojúhelník lze sestrojit. S ohledem na délky stran nám stačí pouze jedna trojúhelníková nerovnost. (Pokud platí, platí i zbylé dvě):

$$3\frac{1}{3} < 1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}$$

Vzhledem k tomu, že tato nerovnost platí (levá strana se rovná čtyřem), existuje trojúhelník CTT_1 a tedy i trojúhelník ABC Billy neměl pravdu.

Marťa

Úloha 4.



Existuje více způsobů jak řešit tuto úlohu, předvedu jeden z těch elegantnějších.

Vycházejme z obrázku. Uvědomme si, že trojúhelník BCE je rovnoramenný se základnou BC.

Dále si uvědomme, že jde o část čtverce, a sice jednu z polovin oddělených úhlopříčkou BC. Obsah tohoto čtverce spočítáme (je to polovina součinu úhlopříček). Obsah čtverce je roven dvěma. Tento obsah vydělím dvěma (abych získal obsah trojúhelníku BCE) a ihned dvěma vynásobím, neboť si uvědomím, že trojúhelník ADF je s ním shodný. Vyjde mi tedy 2 a už se ptám jenom na obdélník $CDFE$.

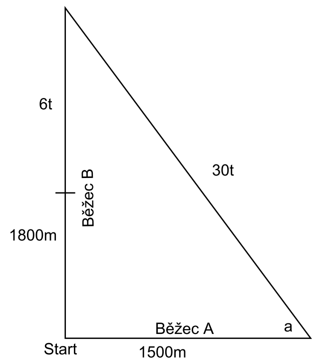
Vidím, že $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$ to znamená, že CD je dvakrát delší než BE. Teď klíčová úvaha: V porovnání s naším výše uvedeným vymyšleným čtvercem s úhlopříčkou BC má náš obdélník jednu velikost strany stejnou a druhou dvakrát delší, proto musí mít dvakrát větší obsah, čili 4. Obsah lichoběžníku je roven 2+4=6.

Jelikož jde o lichoběžníky tři je správný výsledek $6 \cdot 3 = 18$.

Tento způsob se mi obzvláště zamlouvá, protože jsme se vyhnuli Pythagorově větě a únavným odmocninám.

Vasil

Úloha 5.



Za pětminut uběhl běžec A 1500 m. (Běžel rychlostí 300 sekund rychlostí 5 m·s^{-1}) Běžec B za stejnou dobu urazil 1800 m.

Běžec A změní směr a běží t sekund než dožene běžce B. Protože běží rychlostí 30 m·s^{-1}), uběhne $30t$ metrů. Za stejných t sekund uběhl běžec B $6t$ metrů.

Nyní stačí použít Pythagorovu větu:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

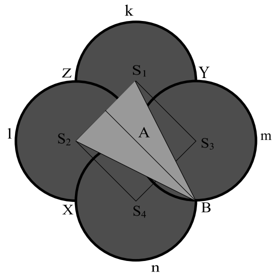
$$864t^2 - 21600t - 549000 = 0$$

$$t = 93,187$$

Stačí nám tento kladný kořen, čas nemůže být záporný. Nyní už není problém spočítat všechny strany trojúhelníka a pomocí libovolné goniometrické funkce spočítat úhel $\alpha = 57°33$ (Popřípadě doplňkový úhel do $180°$ - úloha se dala pochopit i takto)

Filda

Úloha 6.



Jelikož se všechny čtyři kružnic stýkají v bodě A, a dále mají právě čtyři průniky (Z, X, Y, B), tak středy těchto kružnic (S_1, S_2, S_3, S_4) tvoří čtverec $S_1S_2S_3S_4$.

K výpočtu obsahu trojúhelníku potřebuji znát délku strany a délku výšky na ni. Budeme počítat se stranou S_1S_2 a výškou na ni.

1. Vyjádření délky strany S_1S_2

   Strana S_1S_2 je přeponou v rovnostranném pravoúhlém trojúhelníku S_1S_2Z, kde $\|S_1Z| = |S_2Z|$ a $|S_1Z$ i $|S_2Z|$ mají délku 2 cm (poloměr kružnice), podle Pythagorovy věty platí:
   $|S_1Z|^2 + |S_2Z|^2 = |S_1S_2|^2$, po dosazení $|S_1S_2 = \sqrt{8}$.

2. Vyjádření délky výšky na stanu S_1S_2:

   Můžeme si její délku vyjádřit jako úhlopříčku ve čtverci $AS3BS4$–$|AB$ a $\frac{1}{2}$ úhlopříčky čtverce S_1AS_2Z–$|AZ|$. Jelikož oba tyto čtverce jsou shodné (jejich stany jsou rovny poloměru daných kružnic, tedy 2cm) a $|S_1S_2| = |AB| = |AZ|$ a protože platí že úhlopříčky ve čtverci jsou shodné, tak si délku výšky na stranu S_1S_2, můžeme vyjádřit takto:

   $|AB| + \frac{1}{2}|AZ| = |S_1S_2| + \frac{1}{2}|S_1S_2|$

3. Určení obsahu trojúhelníku S_1S_2B: Výpočet provedeme podle vzorce $S_{S_1S_2B} = \frac{1}{2}|S_1S_2|B = \frac{1}{2}(|S_1S_2|)(|S_1S_2|+ \frac{1}{2}|S_1S_2|)$, po dosazení:

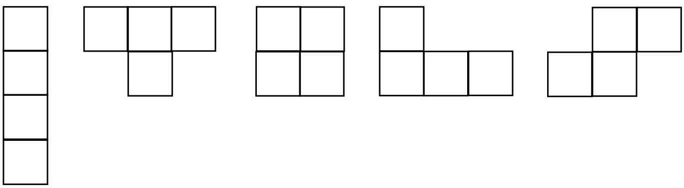
   $SS_1S_2B = 6\ \text{cm}^2$.

Eliška

Metoda obarvování

V dalším díle PIROHU POZNÁNÍ se podíváme zase na jinou metodu řešení úloh, a tou je metoda obarvování, kterou se měla řešit i jedna úloha z minulé série. Metoda obarvování se používá většinou v příkladech, kdy se do čtvercové sítě umisťují nějaké kostky a zkoumá se, jdou-li tam naskládat. V tomto případě si síť obarvíme, nejčastěji se používá šachovnicové obarvování, tedy tak, že vybarvíme ty políčka černě, které se dotýkají rohem (prostě jako šachovnici). Lze ovšem zvolit i jiné obarvení a záleží vždy na úloze, které je nejvhodnější. Můžeme síť obarvit třeba taky šachovnicově, ale jednotlivá políčka budou mít velikost třeba 2 x 2 (nebo samozřejmě i jinou). Nebo síť obarvíme pruhovaně či jakkoliv jinak, prostě tak, jak se nám to hodí do konkrétní úlohy. Můžeme taky použít i více barev než jen černou a bílou. Tím to však nekončí. Dále musíme postupovat podle zadání úlohy. Skládají-li se do sítě nějaké kostky, zjistíme jak se tyto kostky obarví a vyvodíme z toho nějaký závěr. Nejlepší bude si to vyzkoušet na nějakých úlohách. Vy, co jste neřešili 1. úlohu z minulé série, si ji ještě můžete cvičně vyřešit. Autorské řešení najdete v této sérii.

Úloha 1: Je možné sestavit obdélník použitím právě jednoho kusu kostky od každého z těchto druhů?

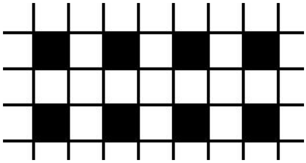


Řešení:

Obdélník můžeme vybarvit jako šachovnici, je tedy složen z 10 černých a 10 bílých políček. Všechny typy kostek až na tvar „T“, jsou vždy obarveny tak, že se skládají ze dvou bílých i černých políček. Tvar „T“ je buď ze 3 černých a 1 bílého políčka nebo z 1 černého a 3 bílých políček (záleží na umístění v šachovnici). Vidíme, že součet černých políček na použitých kostkách je buď 9 nebo 11, ale nikdy 10. Obdélník tedy nelze z těchto tvarů sestavit.

Úloha 2: Obdélníková podlaha je pokryta kachličkami o velikostech 2 x 2 nebo 1 x 4. Jedna kachlička se však rozbila a byla nahrazena kachličkou druhého typu. Lze pouhým přeskládáním kachliček znovu pokrýt celou podlahu?

Řešení:
Podlahu si obarvíme podle obrázku. Vidíme, že kostky 2 x 2 obsahují vždy 1 černé políčko, zatímco kostky tvaru 1 x 4 buď žádné nebo 2 černá políčka. Pokud tedy jednu kostku vyměníme, nelze podlahu seskládat zpátky.



Úloha 3: Lze síť 10 x 10 pokrýt pouze kostkami tvaru „I“ (1 x 4)?

Řešení:
Nyní si síť obarvíme dokonce čtyřmi barvami, které pro jednoduchost nahradíme čísly 0, 1, 2, 3, tak jak můžete vidět na obrázku. Umístěním kostky vždy pokryjeme od každé barvy jedno políčko. Celkem musíme umístit 25 kostek. Na obrázku je však barvou 1 obarveno 26 polí.

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Úloha 4: Mějme krychli ze sýra o velikosti 3 x 3 x 3. Myš se rozhodla tento sýr sežrat, a to tak, že prostřední dílek sežere jako poslední. Myš může začít hlodat

odkudkoliv a jako další dílek může sežrat vždy ten, který sousedil s předchozím stěnou. Může myš uvedeným postupem tento sýr sežrat?

Řešení:

Krychli si obarvíme jako šachovnici, ale tentokrát v prostoru (ještě nikdy jste nehráli 3D šachy?). Řekněme, že prostřední dílek je černý (funguje to samozřejmě i naopak). Krychle se tedy skládá z 13 černých a 14 bílých krychliček. Jelikož myš může sežrat vždy jen sousední dílek, pak má tento dílek vždy opačnou barvu než dílek předcházející. Začněme od konce: jako poslední sežere černý dílek (ten uprostřed), před ním však to musel být bílý dílek, atd: Č, B, Č, B, Č, B, … Takhle může sežrat 13 černých a 13 bílých krychliček, ale tu 14 bílou sežrat již nemůže, protože před ní sežrala také bílou. Takže jedna bílá zůstane. Myš tedy takhle sežrat celou krychli nemůže.

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	9	7	6	5	8	5	40	Hafo
1.	Berenika	Čermáková	-	-	-	5	-	4	9	20

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	9	7	6	5	8	5	40	Hafo
1.	Aleš	Krčil	3	7	6	5	8	5	34	74
2.	Alžběta	Maleňáková	5	7	3	5	8	4	32	72
3.	Jan	Havelka	-	7	6	5	7	5	30	62
4.	Pavel	Turek	0	7	6	5	5	5	28	52
5.	Eliška	Červenková	0	7	-	4	7	3	21	47
6.	Pavel	Vondráček	-	0	5	1	-	3	9	24
7.	Jiří	Gbelec	-	-	0	4	-	4	8	19
8.	Anastázie	Chalupová	0	1	1	0	-	-	2	4

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	9	7	6	5	8	5	40	Hafo
1.	Anna	Kufová	9	7	6	5	8	5	40	80
2.	Marek	Janka	2	7	0	5	8	5	27	65
3.	Daniel	Pišťák	-	7	2	3	7	5	24	50
4.-5.	Anna	Červenková	0	7	-	4	7	3	21	47
	David	Gráf	0	7	0	-	4	3	14	47
6.	Ondřej	Pavelka	-	7	-	-	-	2	9	42
7.	Veronika	Hájková	-	-	-	-	-	-	0	34
8.	Jana	Gebauerová	-	-	-	-	-	-	0	33
9.	Vít	Grosser	-	-	-	-	-	-	0	32
10.	Jakub	Novák	0	7	-	4	5	1	17	30

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
11.	Patrik	Šindler	0	7	5	5	6	5	28	28
12.-13.	Veronika	Hánová	-	0	-	-	-	5	5	26
	Eliška	Pfaurová	-	0	-	-	-	5	5	26
14.-15.	Zuzana	Beigerová	-	-	-	-	-	-	0	22
	Lukáš	Klocek	-	-	-	-	-	-	0	22
16.-17.	Lukáš	Frankl	-	-	-	-	-	-	0	15
	Kateřina	Grygarová	-	-	-	-	-	-	0	15
18.	Eva	Kubelová	-	-	-	-	-	-	0	12
19.	Daniel	Musil	-	-	-	-	-	-	0	10
20.	Iveta	Márovcová	-	-	-	-	-	-	0	6
21.	Jindřich	Brož	0	0	0	0	0	0	0	5
22.	Jakub	Brož	0	0	0	0	0	0	0	3

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	9	7	6	5	8	5	40	Hafo
1.	Ondřej	Darmovzal	7	7	6	5	8	5	38	77
2.	Václav	Rozhoň	9	7	-	5	8	5	34	73
3.	Szymon	Wantuła	9	7	0	5	8	5	34	72
4.	Martin	Vančura	9	7	1	3	8	5	33	69
5.	Jan	Skořepa	0	7	6	5	6	5	29	60
6.-7.	Matěj	Dirr	0	5	3	5	8	3	24	57
	Michael	Matějka	-	5	0	4	5	5	19	57
8.	Jan	Marek	2	7	0	5	0	5	19	52
9.	Tomáš	Müller	0	7	3	5	5	5	25	47
10.	Diana	Hachová	3	7	6	5	-	4	25	42
11.	Radim	Bárta	-	0	-	0	2	3	5	36
12.	Eva	Harlenderová	-	-	-	5	-	5	10	35
13.	Jan	Erhart	-	-	-	4	-	5	9	34
14.	Štěpánka	Dobalová	-	-	-	-	-	-	0	24
15.	Vojtěch	Kovář	-	0	0	2	-	5	7	18
16.	Petra	Pavelková	-	-	-	-	-	-	0	17
17.	Pavel	Kubíska	-	1	0	1	1	1	4	15
18.	Jan	Jež	-	-	-	-	-	-	0	14
19.	Veronika	Synková	-	-	-	-	-	-	0	13
20.-21.	Pavla	Baarová	-	-	-	-	-	-	0	10
	Kristýna	Krupičková	-	-	0	2	-	-	2	10