# KOKOS

**30.ročník ⋆ 3.leták**

Svátky klidu a míru minuly, přišel nový rok a my se všichni vracíme zpět do školy. Ale nezoufej! S novým rokem totiž přichází již třetí KoKoSová série, aby Ti zpříjemnila tyto zimní dny. Jako obvykle zde najdeš pokračování příběhu, šest zajímavých úloh a navíc Piroh, ve kterém se podíváme na Teorii her. Přejeme Ti hodně zdaru při řešení úloh, ale především hodně zdraví a spokojenosti v novém roce.

## Víkendovka s KoKoSem

Abychom Ti ještě více přiblížili náš korespondenční seminář KoKoS, a zároveň Tě odměnili za Tvou snahu, připravujeme pro Tebe Víkendovku s KoKoSem, která proběhne 1.–4. 2. 2018 v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci, a to pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

Jedná se o 4 dny plné zábavy, her, a také přednášek na témata matematická, fyzikální či chemická.Cena, stanovená na 300 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Pokud máš jakékoliv otázky, neváhej se obrátit na náš email gmkkokos@seznam.cz, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, tak neváhej a vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na našich webových stránkách kokos.gmk.cz. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

## Zadání úloh

Bětka zažívala v adventních dnech neobvyklý pocit, kterému sama nevěřila. Od té doby, co ji Alois začal doučovat matematiku, nemohla si pomoct a dokonce se ráda učila ve volném čase. Příklady ji doslova vtahovaly, občas se přistihla, že si v jednu ráno kreslí grafy či podivné geometrické obrazce.

Nejvíce ji však vykolejilo, když zjistila, jací jsou matematici flákači. Sedívala teď většinu hodin s Aloisem a ten buď hodinu prospal, nebo hleděl z okna. Bětka byla přesvědčena, že kdo se zabývá matikou, musí být automaticky šprt. Čím víc však poznávala Aloisovy kamarády, tím víc zjišťovala, jak se mýlila.

Jednoho dne v hodině biologie Alois kompletně přestal dávat pozor, vytáhl z aktovky zápalky a vysypal je na stůl. „Tohle už mě nebaví, pojďme si zahrát hru.“

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec ✉

**Úloha 1. (7 bodů):** Alois vysypal na stůl balíček zápalek. Bětka nevěděl přesně, kolik jich je, ale odhadla, že je jich více než 10. Pak Alois navrhnul, že si zahrají následující hru: Alois může odebírat 1 nebo 2 zápalky. Bětka může odebírat 3 nebo 5 zápalek. Prohrává ten hráč, který nemá žádný další povolený tah. Můžeme určit, který z hráčů má vyhrávající strategii bez toho, abychom věděli, který z hráčů začíná?

Bětka byla hrou nejdřív trochu zmatená, ale rychle se jí podařilo přijít na princip.

„Nikdy mě ani nenapadlo, že hry můžu chápat matematicky," podivila se.

„Vidíš, matematika je užitečná, dá se aplikovat i na reálný svět," vysvětloval Alois. „Tomuhle se říká teorie her. Hele, ukážu ti další hru."

**Úloha 2. (6 bodů):** Na stole leží 91 zápalek. Bětka a Alois si střídavě berou od 2 do 5 zápalek. Prohrává ten hráč, který si už nemůže brát zápalky. Můžeme určit vhodnou výherní strategii pro některého z hráčů?

Sotva stihli odehrát jedno kolo, když jim učitelka zápalky zabavila a oba napomenula. Alois měl sice rezervní balíček, ale nechtěl ho vytahovat, protože učitelka je teď bedlivěji sledovala.

„Jestli tě to zaujalo, pojď se mnou po škole, máme zrovna sraz nadšenců pro matematické hry, což je vlastně většina matematiků na škole."

„Co bych tam dělala? Akorát bych se cítila hloupě, ještě matematiku tolik neumím."

„Ale neboj, žádné pokročilé vědomosti nepotřebuješ, jsou to jenom hry."

Bětka tedy souhlasila a po konci vyučování se vydala s Aloisem. Když vstoupili do klubovny, spatřila Bětka podivný jev. Dva žáci seděli u stolu a zdálo se, že hrají šachy, ale jen s jednou figurkou. Po chvíli pozorování však odkoukala pravidla a začala se chytat.

**Úloha 3. (7 bodů):** Jirka a Marta hrají hru na čtvercovém poli $7 \times 7$. Hráči pohybují figurkou směrem nahoru nebo doleva o libovolný počet políček. Figurka je umístěná v pravém dolním rohu. Hráči se střídají, přičemž začíná Jirka. Prohrává ten, kdo nemá možný tah. Kdo má vyhrávající strategii?

„Fakt má talent, Aloisi," pokýval Jirka uznale hlavou, když se Bětka zeptala na správnost svého řešení. Pak Bětce představili ostatní v klubovně, měla problém si všechna jména zapamatovat.

„Ještě si tě trochu otestujeme, ať vidíme, jestli jsi jenom neměla štěstí. Pojď sem, Kubo, a ukaž nám tu hru s mincemi." Kuba vzal balíček čokoládových mincí z hromádky sladkostí a ukázal Bětce svou hru.

**Úloha 4. (7 bodů):** Jirka a Kuba na stůl čtvercového tvaru střídavě pokládají mince, všechny stejného tvaru. Položit minci mohou tak, aby nepřesahovala okraj stolu nebo nepřekrývala jinou minci. Prohrává ten, kdo nemůže provést svůj tah. Kdo má vyhrávající strategii, jestliže začíná Kuba?

Po dvou názorných kolech Bětka problém vyřešila a dostalo se jí mnoha pochval. Zbytek odpoledne strávila Bětka hraním nejrůznějších her s matematiky. Zjistila, že to jsou docela fajn lidi a ne taková banda podivínů jak si myslela.

„Myslím, že teď tě můžeme oficiálně považovat za člena kolektivu," oznámil jí po cestě domů Alois.

„Co to obnáší? Hraní her v hodinách?" usmála se Bětka.

„To jenom když se moc nudíme. Obecně ale máme pár tradic. Například na Vánoce si místo dárků vyměňujeme úlohy k řešení."

„Já ale úlohy vymýšlet neumím!" zděsila se.

„Neboj, to přijde. Navíc tím, že jsi nová, nikdo od tebe úlohu letos čekat nebude, ale nějakou ti pošlu, ať si zvykáš."

Na Štědrý večer Bětka úlohu opravdu dostala.

**Úloha 5. (8 bodů):** Mějme $2n + 1$ ($n$ je přirozené číslo) hromádek bonbónů. Na každé hromádce se nachází přesně 420 bonbónů. Bětka a Alois hrají hru. Bětka začíná a postupně odebírají 1 až k bonbónů (k je přirozené číslo větší než 1). Určete všechny možné hodnoty k, tak aby měl Alois vyhrávající strategii.

Dlouho nad úlohou přemýšlela, málem ani nevyšla z pokoje, až když ji maminka zavolala na štědrovečerní večeři.

„Poslyš, Bětko, je sice hezké, že se tak zajímáš o matematiku, ale nepřeháněj to. S takovou z tebe za chvíli bude podivín," varoval ji tatínek.

„Proč by se ze mě měl stát podivín?"

„No, už teď jsi celé odpoledne proseděla v pokoji."

„A ty zase sedíš celé odpoledne u televize, tati, o tolik horší to nebude."

„Bětka má pravdu, " ozvala se maminka, „taky by ti nějaká matematika neuškodila."

To tatínka umlčelo a už si nestěžoval. Nenápadně pak Bětce nakukoval přes rameno, když si kreslila grafy v obývacím pokoji.

Druhý den se objevila další úloha. Tuhle Bětka nečekala, ale zdálo se, že to je problém z reálné situace

**Úloha 6. (7 bodů):** Sourozenci Max a Magda dostali na Vánoce mléčnou čokoládu $4 \times 8$. Rozhodli se, že si zahrají hru s takovými pravidly:

- První jede Max.
- Sourozenec, který je na řadě, rozlomí čokoládu podél vylisované linie.
- Hráči nemohou lámat čokoládu tak, aby vznikl kousek $1 \times 1$.
- Ten hráč, který nemá už co lámat, prohrává celou čokoládu.

Kdo vyhraje celou čokoládu?

Podle Aloise byl tohle docela normální způsob, jakým se řešily spory o sladkosti mezi matematiky. Čokoládu nakonec nedostal ani ten, kdo vyhrál. Více se cenilo vyřešení obecného problému. Bětce se takový způsob líbil, rozhodně byl lepší než se jen tupě hádat.

Nikdy předtím by ji to nenapadlo, ale teď se těšila do školy. To už se jí nestalo tak od páté třídy. Možná to nebylo ani tak o škole, jako spíš o nových kamarádech… a samozřejmě o nových úlohách.

*Řešení úloh 3. série posílejte do **9.2.2018** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

## Autorská řešení 2. série

### Úloha 1.

Celý první nákup by po zdražení stál $100 + 100 \cdot 30\% = 130$ Kč. Náš druhý nákup ale stál jen 100 Kč s tím, že hranolek bylo stejně, ale kofoly bylo jen 0,25 l místo 0,5 l. Z toho vyplývá že 0,25 l kofoly stálo po prvním zdražení 30 Kč. Hranolky po prvním zdražení musely stát $100 - 30 = 70$ Kč. Po druhém zdražení tyto hranolky budou stát $70 \cdot 30\% = 91$ Kč. Za 100 Kč si Bětka hranolky pořídit může.

**Jiné řešení:**

Označme si $x$ cenu hranolek a y cenu 1 l kofoly. Ze zadání platí rovnice:

$$\begin{aligned} x + 0,5y &= 100 \\ 1,3(x + 0,25y) &= 100 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé:

$$\begin{aligned} y &= 200 - 2x \\ 1,3[x + 0,25(200 - 2x)] &= 100 \end{aligned}$$

vyřešíme:

$$\begin{aligned} 1,3[x + 0,25(200 - 2x)] &= 100 \\ 0,5x + 50 &= 100/1,3 \\ 0,5x &= 27 \\ x &= 54 \end{aligned}$$

Spočítali jsme, že hranolky před prvním zdražením stály přibližně 54 Kč. Po druhém zdražení budou stát $(54 \cdot 1,3) \cdot 1,3 = 91$ Kč. Hranolky po druhém zdražení budou stát přibližně 91 Kč, proto si je Bětka může za 100 Kč koupit.

*Hanka*

### Úloha 2.

Pro převod teplot ze stupnice Celsia na Fahrenheitovu stupnici platí vztah: $F = \frac{9}{5}C + 32$, kde C je teplota ve stupních Celsia, F je teplota ve stupních Fahrenheita.

Hledaná teplota má být stejná ve stupních Fahrenheita tak ve stupních Celsia, proto platí F = C. Do prvního vztahu dosadíme F za C. Následná rovnice vypadá:

$$C = \frac{9}{5}C + 32$$

.

Úpravou dostaneme:

$$C = -40$$

.

Teplota Fahrenheitovy stupnice stejná jako v Celsiově je při $-40°$C.

*Zuzka*

### Úloha 3.

Označme si celkovou práci jako $x$. Pak za hodinu Petr udělá $\frac{x}{9}$, Jirka $\frac{x}{12}$, Milan $\frac{x}{18}$. Označme čas od chvíle kdy přijde Milan jako $t$, pak musí platit:

$$\frac{(3x + tx)}{9} + \frac{(x + tx)}{12} + \frac{(tx)}{18} = x$$

Úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{(15x + 9tx)}{36n} &= x \\ 9tx &= 21x \\ t &= 2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Když k výsledku přičteme 3 hodiny, které uběhly od začátku do doby, kdy přišel Milan, tak získáme výsledný čas 5 hodin a 20 minut.

*Magda*

**Úloha 4.**

Označíme si Karla jako a, dále Edu jako $b$, Alenku jako $c$ a Arabelu jako $d$. Víme, že $a < 400$ a $a > (\frac{702}{2})$. Tudíž hledáme číslo a v intervalu od 351 do 400. Zjevně bude trojciferné. Všechny jeho číslice jsou liché a musí být taky dělitelné 5, to znamená, že číslo a končí na 5 a z první podmínky musí začínat na 3. Aby byl ciferný součet roven 17, musí být zbývající číslo 9. Takže Karel má 395 let. Věk Edy vypočítáme jako $b = \frac{(a-1)}{2} = \frac{394}{2} = 197$. Věk Arabely vypočítáme jako $d = \frac{(b-7)}{10} = \frac{190}{10} = 10$. Celkový věk Alenky dostaneme odečtením součtu Arabely, Edy a Karla od součtu věků v rodině. $c = 702 - 395 - 197 - 19 = 91$ let.

*Venda*

**Úloha 5.**

Vzhledem k tomu, že jsou body $K$ a $L$ středy stran $AB$ a $AC$, pak je úsečka $KL$ střední příčkou trojúhelníku. Jedna z vlastností středních příček nám říká, že: $|KL| = |BC|/2 = 3,5$ cm. Teď můžeme říct, že velikost výšky u vrcholu $A$ v trojúhelníku $AKL$ je poloviční než výška na stranu a v trojúhelníku $ABC$, takže $v_a = 6$ cm. Dále použijeme goniometrické funkce k vypočítání velikostí úhlů v trojúhelníku $ABC$.

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{v_a}{|AC|} \\ \tan\alpha = \tan\beta &= \frac{v_a}{|BC| - \sqrt{(|AC|^2 - v_a^2)}} \end{aligned}$$

Velikosti úhlů v trojúhelníku jsou: $\alpha = \beta = 60°30$ a $\gamma = 59°$.

*Jirka*

**Úloha 6.**

Původní číslo si můžeme zapsat jako $100a+10b+c$, nové číslo jako $100c+10b+a$, kde $a$, $b$, $c$ jsou číslice. Odečtením nového čísla od původního dostaneme $99a$–$99c$, což se má rovnat 99. Proto $a$–$c = 1$, první a třetí číslice se tedy liší o 1. Protože trojciferné číslo nemůže začínat nulou, máme 8 možných dvojic$a$, $c$: (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5), (7,6), (8,7), (9,8). Na místo desítek můžeme umístit jakoukoliv číslici, tzn. 10 možností. Celkem máme $8 \cdot 10 = 80$ trojciferných čísel splňujících danou vlastnost.

*Barča*

# Teorie her

## Čím se vlastně teorie her zabývá?

Teorie her se zabývá rozhodováním v konfliktních situacích. To znamená v situacích, kdy nezáleží jenom na našem rozhodnutí, ale i na rozhodnutí ostatních zúčastněných (hráčů). Jako příklad si můžeme uvézt hru piškvorky, protože každý tah soupeře ovlivní náš budoucí tah. Teorie her se v dnešní době využívá v mnoha oblastech, například v politologii, ekonomii, sociologii …

## Kombinatorické hry

Nejdříve si řekněme, jaké podmínky musí kombinatorické hry splňovat. Nejdůležitějším pravidlem je, že v takových hrách nesmí o ničem rozhodovat náhoda. Třeba hra: *„Člověče, nezlob se“* není kombinatorickou hrou, protože zde hraje zásadní roli náhoda a my nemůžeme nijak ovlivnit a promýšlet tahy dopředu. Dalším pravidlem je, že oba dva hráči mají kompletní informace. Jinak řečeno, že ani jednomu nejsou zatajena pravidla nebo možnosti druhého hráče. Například *„Poker“* taky není kombinatorickou hrou, protože žádný hráč během hry neví, jaké karty drží ostatní hráči v ruce. Posledním pravidlem je, že tahy všech hráčů jsou racionální. Neboli, že oba hráči hrají podle nejlepší strategie, dělají pouze promyšlené tahy a nedopouští se chyb.

## Strategie

Pojmem strategie rozumíme nějaké pravidlo pro rozhodování v jednotlivých pozicích hry. V této sérii a PiRoHu se budeme zabývat pouze hry, které nepřipouští remízu a mají konečný počet tahů. Hra tedy končí vítězstvím jednoho z hráčů. Ve většině příkladů budeme hledat, který hráč má vyhrávající strategii. Když se bude daný hráč držet vyhrávající strategie, tak musí ve hře zvítězit a to nezávisle na tazích druhého hráče.

## Metody řešení příkladů

Ukažme si teď nějaké typy úloh na teorii her a způsoby řešení. U každé úlohy si ukážeme jiný způsob řešení.

**1.** Dva hráči hrají hru s čokoládou, která má $4 \times 10$ dílků. Během každého tahu ji hráč co je zrovna na řadě podél některé čáry rozlomí. Kdo mám vyhrávající strategii, pokud prohrává hráč, který nemá žádný tah?

**řešení:** Tuto úlohu lze řešit logickým rozborem. Na začátku hry máme jeden kus čokolády. Po prvním tahu z ní budou 2 kusy a po každém dalším tahu se počet kusů zvětší o 1. Na konci hry, kdy už nikdo nemá žádný tah, budeme mít čokoládu rozlámanou na $4 \times 10 = 40$ dílků. To znamená, že během hry lze celkem udělat právě 39 tahů, takže vyhrávající strategii musím mít nutně hráč, který začíná.

**2.** Máme hromádku, kde je 11 sirek. Hráči postupně během svého tahu vytahují z hromádky 1 nebo 2 sirky. Určete, který hráč má vyhrávající strategii, pokud prohrává hráč, který nemůže provézt žádný tah.

**řešení:** Tuto úlohu můžeme řešit tzv. zpětným rozborem. Nakresleme si jednotlivé počty sirek, které mohou na stole ležet. Konečnou pozici, kdy je na stole 0 zápalek, si nazvěme jako prohrávající pozici (označme si ji písmenem $P$), protože ve chvíli, kdy tento počet sirek bude na stole, tak hráč, co je zrovna na řadě, prohrál. Prohrávající pozicí tedy chápeme situaci během hry, při které můžeme jednoznačně říct, že hráč na tahu nemá vyhrávající strategii. Teď si rozeberme případ, kdy se na stole nachází 1 nebo 2 zápalky. Tyto pozice jsou vyhrávající, jelikož hráč na tahu může udělat tah takový, aby se na stole nacházelo 0 sirek. Tím dostane druhého hráče do prohrávající pozice. Vyhrávající pozici (označme si ji písmenem $V$) tedy chápeme situaci během hry, při které můžeme jednoznačně říct, že hráč na tahu má vyhrávající strategii. Situaci, kdy jsou na stole 3 sirky, nazveme taky jako prohrávající, protože hráč na tahu může táhnout jen tak, že dostane druhého hráče do vyhrávající pozice. Takhle můžeme postupně doplnit označení pozic pro všechny možné počty sirek na stole (viz tabulka).

<table>
<tr><td></td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td><td>|||||</td><td>||||||</td><td>|||||||</td><td>||||||||</td><td>|||||||||</td><td>||||||||||</td><td>|||||||||||</td></tr>
<tr><td>$P$</td><td>$V$</td><td>$V$</td><td>$P$</td><td>$V$</td><td>$V$</td><td>$P$</td><td>$V$</td><td>$V$</td><td>$P$</td><td>$V$</td><td>$V$</td></tr>
</table>

Vyhrávající strategii má tedy začínající hráč.

**3.** Na stole leží 2 hromádky se stejným počtem kamenů. Hráči postupně odebírají libovolný počet kamenů, ale můžou v jednom tahu odebírat pouze z jedné hromádky. V tazích se postupně střídají a vyhrává hráč, který udělá poslední tah (po jeho tahu nezbude na stole žádný kámen). Který z hráčů má vyhrávající strategii?

**řešení:** K řešení tohoto příkladu využijeme tzv. metodu symetrie. Pokaždé, když začínající hráč odebere nějaký počet kamenů, tak druhý hráč provede ten samý tah jen druhé hromádce. Tím zajistíme, že po tahu druhého hráče bude počet kamenů na obou hromádkách stejný. Ve chvíli, kdy odebere začínající hráč poslední kámen z jedné hromádky, odebere v dalším tahu i druhý hráč poslední kámen z druhé hromádky, čímž vyhraje. Vyhrávající strategii má druhý hráč.

**4.** Mějme na papíře napsané číslo 2. V každém tahu k němu budeme přičítat nějakého dělitele napsaného čísla, které je však menší než číslo samotné. Po každém tahu se nám číslo na papíře bude měnit. Hráč, který jako první překročí svým tahem hodnotu 100, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii?

**řešení:** Rozkresleme si několik prvních pozic, do které se může hra dostat (v závorce je vždy zapsáno číslo, které jsme přičetli). Vzhledem k tomu, že hra není nekonečná, musíme nějak zpětným rozborem dospět k určení jednotlivých vyhrávajících a prohrávajících pozic. Rozdělme si tedy úlohu na dva případy podle toho, jestli je pozice 6 vyhrávající nebo prohrávající.

**a)** Pozice je vyhrávající. Ve chvíli, kdy je na papíře napsáno číslo 4, je na řadě 1. hráč (začínající hráč). Potom 1. hráč přičte číslo 1, čímž dostane druhého hráče do pozice, kdy může přičíst pouze číslo 1 a dostat tak na papír číslo 6. Tímto způsobem dostal 2. hráč 1. hráče do vyhrávající pozice.

**b)** Pozice je prohrávající. 1. hráč udělá tah, během kterého přičte číslo 2. Tento tah dostal 2. hráče do prohrávající pozice, proto je hráč 1 v pozici vyhrávající.

Tímto postupem jsme zjistili, že kdykoliv nezávisle na dalších tazích může 1. hráč udělat tah tak, aby byl ve vehrávající pozici a vyhrál.

*Jirka*