KOKOS

31.ročník ⋆ **4.leták**

Milý řešiteli,
přišlo druhé pololetí a s ním přichází i další série plná nových zajímavých příkladů proložených pokračováním Jirkova velkého matematického dobrodružství. Tak nesmutni nad roztátým sněhem a užij si novou sadu zábavy.

Zadání úloh

Jirka se propadal rozměry. Okolí samovolně procházelo skrze dimenze, z osmé do druhé a do patnácté. Protínající se rovnoběžky se překrucovaly v přímoúhlé trojúhelníky, pí se rovnalo třem a kladný směr číselné osy končil záporným zlomkem. Jednička dělená nulou se rovnala čtyřiceti dvěma. Těsně před probuzením Jirka uviděl mezi tvary a koncepty, pro které ani nenalézal pojmenování, strukturu rozložení prvočísel.

Všechno zmizelo, když otevřel oči a zaostřil na trámy nad sebou. Z těch pomalu odpadávala zrnka prachu třpytící se v tenkých paprscích slunce, které pronikaly štěrbinami ve stropě. Studená podlaha Jirku donutila posadit se a pořádně se rozhlédnout. Nejdříve se v přítmí nemohl zorientovat, ale tohle místo mu přišlo povědomé.

Kvůli chladu ho někdo navlékl do zimního oblečení a zabalil ho několika opelichanými dekami. Byl sice uvnitř, ale zdi měly nejspíš sotva více než estetickou funkci, protože cítil na na tvářích průvan. Ta místnost byla velká skoro jako školní aula, určitě by se ani nedala pořádně vytopit.

Jirkův pohled zavadil o podstavec na knihu nedaleko od místa, kde ležel. Vypadalo to, že na něm leží tlustá černá kniha, přivázaná řetězy. Jakkoliv byl Jirka zvědavý, chtěl se odsud dostat co nejdříve. Zvedl se a vydal se hledat únikovou cestu. U východu z místnosti mu došlo, kde to vlastně je. Byl tady jen jednou, na půdu gymnázia studenty jen tak nepouštějí.

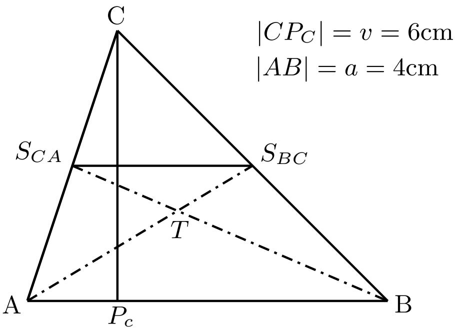
Rychle běžel směrem, kde podle toho, co si pamatoval, měly být dveře zpátky do školy. Dveře tam byly, ale klíč neměl. Zoufale zkoušel bušit, ale ve vrchních patrech školy už nejspíš nikdo nebyl. Ani žádný matematický trik nefungoval, nemohl se pořádně soustředit.

Nezbývalo mu nic jiného než se vrátit do místnosti, kde se probudil. Jakmile vstoupil, znovu se mu v zorném poli objevila ta černá kniha. Zkusil od ní odrthnout oči, ale i když se snažil dívat jinam, stále se díval na ni. Otočil se k ní zády a opět ji našel před sebou. Udělal krok vzad, ale posunul se dopředu. Začínal mít závrať. Mrknul a objevil se přímo před podstavcem.

Ta kniha byla vázaná v černé kůži zdobené stříbrnými obrazci. Ve středu přebalu bylo napsáno $\mathcal{MATEMATICON}$. K podstavci byla přikována težkými řetězy se staromódním kladkovým zámkem, který však neměl klíčovou dírku. Jirka se ho opatrně dotkl, ani nevěděl proč.

V prachu okolo něj se najednou utvořila geometrická struktura. Jemně světélkovala roztodivnými barvami. Jakoby odnikud se ozval hlas suchý jako papír a tichý jako ševelení listů ve větru.

Úloha 1. (9 bodů): Jaký je obsah malého trojúhelníku $S_{CA}TS_{CB}$?



(obrázek je pouze ilustrační, nezachycuje reálné délky stran trojúhelníku ABC)

Jirka odpověděl příslušným řešením. Zámek se rozpadl, jako by byl z písku. Matematicon se začal třást, odlétla z něj mračna prachu, zdálo se, že se sám rozletí. Ozvalo se šustivé vzdechnuí, vše se na vteřinu zklidnilo a pak se stránky knihy s lupnutím otevřely.

„Á, matematik, jaké to štěstí," promluvil znova šustivý hlas. „Kdopak jsi, človíčku?"

„Jirka," odpověděl s leknutím. „Co ty jsi zač?"

„Já jsem $\mathcal{MATEMATICON}$, soubor veškerého matematického vědění. Třes se, neb stojíš před nejdůležitější knihou světa!"

„Máš prázdné stránky. To je toho vědění tak málo?" nahlédl Jirka do knihy.

„Hlupáku!" rozezněla se místnost výkřikem. „Tvá malá mysl by nezvládla pojmout ani první stránku!" Stránky Matematikonu samy začaly listovat závratnout rychlostí. Jirka zahlédl shluky rovnic a obrázků, ale nedokázal pochytit nic.

„Nicméně," uklidnila se kniha a promluvila zamyšleně, „podařilo se ti uvolnit mě a za to máš můj vděk. Než ti však odhalím kterékoliv se svých tajemství, musím vědět, že jsi opravdu schopen takové vědomosti pojmout. Kde že to jsme? Ah, vzpomínám si, na půdě gymnázia."

Úloha 2. (6 bodů): Střechu gymnázia tvoří 4 stejné rovnoramenné lichoběžníky a jeden čtverec. Každý lichoběžník je úhlopříčkou rozdělený na 2 části, menší z nich má obsah 6,76m^2, tj. stejný obsah jako horní čtverec. Delší základna lichoběžníku je dvakrát delší než jeho rameno. Vypočti povrch celé střechy.

„Inu, nejspíš budeš chytřejší než ti, co se tu občas objeví. Ti jsou sotva schopní násobit. Jsi připraven na svou odměnu?“

Dříve než stihl Jirka cokoliv odpovědět, zaklapnul se Matematikon s hlasitým lupnutím a třesknutím se znova otevřel na popsané dvoustránce. Rovnice a náčtrky zazářily červeným světlem, které Jirkovi málem vypálilo sítnici.

Překvapením upadl na zem a zakryl si oči. V hlavě mu začaly běhat vzorce a výrazy, nekonečné rozvoje a jiné podivnosti. Ztratil pojem o čase, ale byl si jistý, že na podlaze ležel schoulený v klubíčku alespoň půl hodiny.

„Ale no tak, nebuď slečinka,“ ozvala se pak kniha.

„Co to bylo?“

„Snad jsi nečekal, že tě něco budu učit normálně. Jsem sice mluvící kniha, ale nemám čas pořádat přednášky.“

„Mělo by se něco změ-“ V tu chvíli se Jirka konečně rozkoukal. Všechno se zdálo být víceméně stejné, ale ne úplně. Najednou viděl, co nejspíš viděli Max a Magda.

Udělal krok vpřed. Objevil se u kraje místnosti. Udělal krok stranou. Objevil se přímo před knihou.

„Ah, dílo se očividně povedlo.“

„Můžeš mě naučit víc?“

„Hehehe, samozřejmě.“ Kdyby měl Matematikon hrdlo, smál by se hrdelním smíchem. „Takhle jednoduché to ale nebude. Nemůžu na tebe prostě přenést všechno. Zešílel bys. Mysl je třeba trénovat, aby se stala silnější. Nepřesuneme se na nějaké příjemnější místo? Tady je to tak ponuré.“

„Už jsem zkoušel se odsud dostat.“

„To možná, ale to bylo před tím, než jsem tě trochu vylepšil.“ Jirka si byl jistý, že slyšel v tónu knihy úsměv. Ostýchavě nabral Matematikon do náruče a udělal krok vzad.

* * *

Objevil se přímo ve vestibulu. Za okny začalo zapadat slunce. Chtěl s Matematikonem zajít za Maxem nebo Magdou, ale už teď sotva stíhal vlak. Staví se za nimi zítra. V šatně ze sebe shodil cizí oblečení, knihu navzdory jejímu protestování strčil do batohu a vydal se směrem na nádraží.

Cestou přecházel náměstí. Musel se tvářit co nejvíc nenápadně. Na obří místní šachovnici hrála skupina černě oděných studentů podivnou verzi šachu.

Úloha 3. (7 bodů): Na šachovnici 8×8 stojí 42 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 6, které se vzájemně neohrožují. Jaký by byl minimální počet věží, aby šlo vybrat 4, které se vzájemně neohrožují?

Náměstí se mu povedlo obejít a vlak mu naštěstí neujel.

„Mohl bys mě odsud vyndat?“ ozvalo se z batohu. Jirka Matematikon vyndal a položil na stolek před sebou.

„Už mě tam nikdy nedávej. A co teď, chtěl by ses dozvědět další tajemství?“

„Ne že bych nechtěl, ale radši bych tě nejdřív ukázal Maxovi a Magdě. Pořád nevím, co jsi zač.“

„Neeee, to není třeba. Copak o mně musí někdo vědět? Nechme si to mezi námi.“

„Co máš proti ostatním lidem?“

„Víš jak dlouho jsem na té půdě trčel? Jenom proto, že jsem někoho odmítal poslouchat.“

„Koho?“

„Nějakého hlupáka navlečeného v bílém prostěradle. Sotva uměl spočítat objem koule a chtěl po mně má nejsložitější tajemství. Taková nehoráznost!“

„A co s tebou mám teď dělat?“

„Nech si mě, studuj se mnou a nakonec strčíš všechny ty hlupáky do kapsy.“

„Ještě se rozmyslím.“

„Nerozmýšlěj se dlouho. Hmmmmm, už jsme dlouho neměli žádnou úlohu. Je třeba se udržovat ve střehu“

Úloha 4. (6 bodů): Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: $6/(n^3 + 11n)$

* * *

Další dva měsíce trénoval Jirka jak s Magdou a Maxem ve škole, tak doma s Matematikonem. Na jeho doporučení se o knize nikomu nezmiňoval.Když Maxovi vyprávěl o svém matematickém duelu s Žofkou, pokáral ho Max, že se do takových věci nemá pouštět. „Duely jsou dětinská zábava a nerozvážné nebezpečí, raději se jich straň.“

Ve studiu postupoval rychle, Magda ho často chválila. Z Matematikonu se dozvídal samá podivná tajemství. Byl si jistý, že ani jeho dva mentoři takové věci neumí. O svém původu či historii byla však kniha zamlklá a rychle měnila téma, dokud však Jirkovi poskytovala vědění, neměl si proč stěžovat.

Jednoho dne se Matematikon zeptal: „Co jsou vlastně ti Magda a Max zač? Nějací zapšklí středoškolští učitelé?“

„Ne, jsou mnohem mladší. Myslím, že jsou dokonce i studenti, i když jsem je ve škole pořádně neviděl. Většinu času tráví v takové malé zenové zahrádce hluboko pod školou.“

„Ale, nepovídej,“ zašustila kniha zamyšleně stránkami. „Tahle zenová zahrada, tam s nimi studuješ?“

„Občas s nimi, občas mě tam nechají samotného.“ Matematikon znova zašustil, nyní vzrušeně.

„To zní jako skvělé místo na studium, vezmeš mě tam někdy?“

„Jasně, proč ne.“

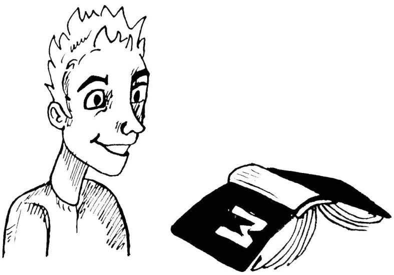
Druhého dne tak Jirka nacpal Matematikon do batohu a vyrazil do školy. Kniha si sice několikrát postěžovala, ale jinak byla mnohem tišší než obvykle. Přes výuku ji raději nechal ve skříňce, nikdo nechce vysvětlovat, proč mu v hodině zvoní mobil, natož proč mu v hodině mluví kniha.

Po poslední hodině se do skříňky vrátil a i s Matematikonem šel do matematické třídy. Pro jistotu zamknul dveře a zatáhl žaluzie, už si nemohl být jistý, že ho ve škole nikdo nesleduje.

„Tohle nevypadá moc jako zenová zahrádka.“

„Pšt, tam se teprv dostaneme,“ řekl Jirka a poklepal na tabuli.

Úloha 5. (8 bodů): Máme čísla na tabuli od 1 do 2019. Vyberu vždy 2 čísla a ty od sebe odečtu. Lze na konci dostat číslo 1?



Jakmile Jirka problém vyřešil, tabule se odsunula a stěna za ní taky. S knihou v náručí začal sestupovat po známém schodišti do útrob školy.

„Uf, tak neelegantní řešení, zbytečné chození,“ začal mrmlat Matematikon. „Přitom by stačilo jen pár malých vylepšení.“ Takhle pokračoval celou cestu až dolů. Jakmile vešli do zahrady, nadšeně zašustil. „Ano, ano, vskutku skvělé místo na studium.“

Bez varování se Jirkovi vytrhl z ruky a přeletěl na kámen uprostřed místnosti. Štěrk na podlaze začal okamžitě reagovat a formovat vzorec.

„Mmmmm, čas na matematiku.“

Úloha 6. (6 bodů): Na kružnici k s průměrem $|AB|$ a středem S leží bod C. Nechť jsou body K, L po řadě středy úseček BC, CA. Urči velikost úhlu $|\measuredangle KSL|$

Jirka velikost úhlu bezmyšlenkovitě určil. Hned toho ale litoval. Matematikon se začal ďábelsky smát. Celé okolí se začalo třást.

„Ano... ANO! Vskutku! Čas na POŘÁDNOU matematiku!“

*Řešení úloh 4. série posílejte do **25.3.2019** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Pokud v trojúhelníku STU vedeme výšku v na jeho základnu, která je takto společně s $\measuredangle UST$ půlena, vznikne pravoúhlý trojúhelník. Můžeme tak pomocí goniometrických funkcí dopočítat velikost poloměru kružnice.

$$\begin{aligned} \sin 56^\circ &= \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} \\ r &= \frac{3}{\sin 56^\circ} \\ r &= 3,6187\text{cm} \end{aligned}$$

Abychom určili obsah šedých ploch z obrázku, je třeba odečíst od obsahu obdélníku obsah dvou kružnic. Víme, že strana b je rovna průměru kružnice $d(= 2r)$ a strana $a = 4r$, vypočítáme tak obsah obdélníku.

$$\begin{aligned} S_1 &= ab \\ S_1 &= 8r^2 = 104,757\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Víme, že obsah kružnice $S_2 = \pi r^2$, po dosazení nám vyjde, že $S_2 = 41,138\text{cm}^2$

$$S = S_1 - 2S_2 = 22,4812\text{cm}^2$$

Zuzka

Úloha 2.

Je-li karet v balíčku 52, nejhorší možnost pro nás nastane, jestliže po vytažení 48 z nich mají čtyři zbývající karty v balíčku stejné číslo, a tak nám určitě teto číslo do postupky chybí. Po vytažení 49. karty už proto máme jistotu, že mezi vytaženými bude jedna celá postupka.

Tomík

Úloha 3.

Řešení je velice prosté, stačí vycházet z předpokladu, že při každém tahu se Slečna přesune na políčko opačné barvy. U šachovnice 10×10 jsou barvy protějších rohů shodné a vzhledem k tomu, že šachovnice má 100 políček, na pokrytí všech by Slečna musela provést 99 kroků a tím nutně skončit na políčku opačné barvy než na jakém začínala. Tímto vzniká spor, který dokazuje, že Slečna nemůže dojít z rohu do protějšího a šlápnout na každé políčko právě jednou.

Ondra

Úloha 4.

Odvoďme vztah pro celkový počet potřesení. Označme počet lidí jako n. Každý člověk si potřásá rukou s $(n-1)$ lidmi. Dostáváme $n \cdot (n-1)$ vztahů. Nyní si všimněme, že jsme započítali každé potřesení rukou dvakrát, proto celý vztah vydělíme dvěma. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1)}{2} &= 153 \\ n^2 - n - 306 &= 0 \quad \textit{roznásobíme v kvadratickou rovnici} \end{aligned}$$

Zjistíme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = 1 + 1224 = 1225 = 35^2$

$$\begin{aligned} n_1 &= (1+35)/2 = 18 \\ n_2 &= (1-35)/2 = -12 \quad \textit{záporný počet lidí nedává smysl} \end{aligned}$$

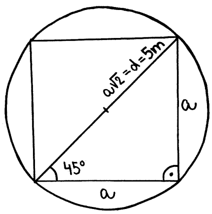
Na matematické konferenci bylo 18 lidí.

Eliška

Úloha 5.

Když rybář nahodí nástrahu, vytvoří se kolem ní kruh o poloměru $r = 2,5$ m, v němž má nástraha účinnost. My máme za úkol celý úsek pokrýt těmito kruhy. Abychom měli lehčí pokrývání, deformujme kruh do čtverce. Tedy do kružnice vepíšeme čtverec.

Víme, že $d = 2r = 5$m a je to zároveň úhlopříčka ve čtverci. Proto si stranu čtverce můžeme vyjádřit jako $a = (5 \cdot \sqrt{2})/2$.



Vypočítáme, kolik je potřeba čtverců na pokrytí pásu 60 m $\times (5 \cdot \sqrt{2})/2$ m.

$$\frac{60}{\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}} \doteq 17 \quad \textit{zaokrouhlujeme na celá čísla, neboť používáme celé čtverce}$$

Teď zjistíme, kolik čtverců je potřeba na pokrytí pásu 40 m $\times(5 \cdot \sqrt{2})/2$m

$$\frac{40}{\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}} \doteq 12 \quad \textit{zaokrouhlíme nahoru k nejbližšímu celému číslu}$$

Máme tedy 17 čtverců na délku a 12 čtverců na výšku. Celkový prostor zaplníme $12 \cdot 17 = 204$ čtverci.
Nyní přichází na řadu Dirichletův princip. Máme 204 polí(čtverců), ve kterých máme 222 ryb. Podle Dirichletova principu musí být v jednom čtverci alespoň 2 ryby. Tímto jsme dokázali, že Petr přinese 2 kapry na štědrovečerní večeři.

Kuba

Úloha 6.

Označme věk pratety t a věk prastrýce s, dále ze zadání víme, že věk pratety je mezi 50 a 80 lety $50 < t < 80$ a zároveň $50 < s < 80$. Sečtením získáme, že věk pratety a prastrýce leží mezi:

$$100 < t + s < 160 \quad (1)$$

Dále víme, že:

$$\begin{aligned} (t+s)\cdot(s-t)+t+s &= 492 \\ (t+s)\cdot(s-t+1) &= 492 \quad (2) \qquad \textit{po úpravě} \end{aligned}$$

Všimněme si členu výše získaného součinu (2), pro který zároveň platí podmínka (1). Jako člen součinu je číslo $(t+s)$ dělitelem 492. Hledáme takového dělitele, který leží mezi čísly 100 až 160. $492 = 2\cdot2\cdot3\cdot41\cdot1$, dělitelé: 1,2,3,4,6,12,41,82,123,164, 246,492. Podmínku splňuje číslo 123:

$$(t+s) = 123 \quad (3)$$

Dosadíme do rovnice (2):

$$\begin{aligned} 123\cdot(s-t+1) &= 492 \\ 3 &= s-t \qquad \textit{po úpravě} \end{aligned}$$

Vyjádříme věk prastrýce $s = t + 3$, a dosadíme do rovnice (3):

$$3 + t + t = 123$$

Tak zjistíme, že prateta má šedesát a prastrýc šedesát tři.

Štěpa

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Michal	Maděřič	-	0	-	5	-	2	7	18

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Milan	Holotňák	7	6	8	5	2	5	33	113
2.	Natálie	Vylamová	7	6	-	6	9	5	33	95
3.	Alžběta	Sedláčková	7	6	-	4	-	4	21	49
4.	Alexandra	Seďová	-	-	-	-	-	-	0	32

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Vilém	Bednařík	2	6	1	7	6	5	27	111
2.	Monika	Štábová	7	6	-	7	-	5	25	109
3.	Jana	Dreiseitlová	5	6	0	6	2	4	23	97
4.	Lukáš	Pohořelský	7	6	1	6	4	5	29	96
5.	Radim	Jeřábek	0	6	5	-	6	2	19	72
6.	Adam	Jemelka	7	-	-	7	-	-	14	71
7.	Linda	Tomišová	7	6	2	5	0	-	20	64
8.	Jakub	Feichtinger	0	6	1	4	5	2	18	61
9.	Aneta	Formánková	7	3	1	0	2	3	16	53
10.	Karolína	Biolková	-	-	-	-	-	-	0	51
11.	Alexandra	Obracajová	-	-	-	-	-	-	0	21
12.	Jakub	Macíček	-	-	-	-	-	-	0	12

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Adam	Kutálek	7	6	3	6	7	5	34	102
2.	Anna	Hronová	-	-	-	-	-	-	0	77
3.	Lída	Kačenková	4	6	-	-	-	4	14	50