KOKOS

30.ročník ⋆ **6.leták**

Milý řešiteli! Je tady konec celoročního semináře. Jestli si vydržel a počítal s námi až do poslední chvíle, můžeš se dočíst, jak to dopadne s našimi hrdiny. Také se zde dozvíš, jak jsi dopadl ve srovnání s ostatními řešiteli nebo se můžeš podívat na správné řešení příkladů z minulé série. Přejeme Ti krásné, dlouhé a slunečné prázdniny a těšíme se, že příští rok budeš opět řešit náš seminář.

Závěrečná část příběhu

Bílovec se celý třásl od přehrady až po nádraží. Ve středu otřesů se ze strany na stranu houpala budova gymnázia a okolo ní běhali splašení matematikové, snažící se starou stavbu stabilizovat. Znenadání se však svět opět uklidnil a země se přestala hýbat.

Náhlý zvrat událostí ale nikoho ze studentů neuklidnil. Zjistili, že všechny jejich matematické triky přestaly fungovat. Veškerá geometrie držící školu pohromadě vypověděla službu, což naštěstí nezpůsobilo její zřícení. Nikdo se však neodvážil vejít dovnitř, nevěřili, že by se na ně nepropadl strop.

„Máš tušení, co se děje, Majdi?“ prodral se Max roztěkaným davem k Magdě.

„Ani nejmenší. Neviděls někde Jirku? Před chvílí mi zase zmizel a to měl jít jenom k hlavnímu vchodu.“

„Není uvnitř?“

„Doufám, že ne.“

„Toma jsi neviděla?“

„Ne, snad je vpořádku.“

Společně se rozhlédli okolo sebe. Všude nepředvídatelně pobíhali studenti. Někteří postupně hlasitě vykřikovali desetinný rozvoj matematických konstant, jiní zoufale čmárali rovnice křídou na zem. Nebylo to k ničemu, všechny fígle přestaly fungovat, čísla zůstávala čísly a přímky odmítaly měnit svůj přirozený tvar.

„Co se to vůbec stalo, Maxi?“

„To kdybych věděl,“ svraštil obočí Max.

„Myslíš, že se něco stalo s vortexem?“

„Vůbec nevím, jak mohl s Matematikonem interagovat, možné je všechno.“

Za nimi se ozvalo skřípění. Oba se otočili, jen aby je zavalil oblak prachu, který vyletěl z vchodových dveří školy. Po notném kašlání, během něhož se prach usadil, uviděli, jak z budovy vychází Jirka a táhne na rameni Toma.

* * *

Po dni tvrdého spánku se Tom naštěstí probudil, i když měl stále na temeni obrovskou bouli od letícího kamene. Matematici se stihli mezitím uklidnit, Jirka jim převyprávěl, co se stalo v podzemí pod gymnáziem. Všichni teď chtěli vědět, co to tam dole Tom provedl, že už nikdo nemůže manipulovat s realitou.

„Promiňte, lidi, jinak to nešlo. Abych zničil Matematikon, musel jsem zničit i celý vortex. Možná by to bývalo šlo i jinak, ale nebyl čas přemýšlet.“

„Takže už není co střežit, už jsme zase obyčejný gympl,“ povzdechl si Max.

„Bohužel, je to tak.“

Tak se stalo, že studenti zahodili černé i bíle rozdíly a začali zase normálně chodit do školy. Nikdo už neměl potřebu se o něco hádat ani o něco bojovat, už zbývala jen pouhá matematika.

A Jirka? Jirka byl rád, že se mohl vrátit k obyčejné matice. Procházet zdmi a kroutit prostorem byla sice zábava, ale kdo na to má čas? A komu by se chtělo do nekonečna vzdorovat zlým mluvícím knihám?

Autorská řešení 5. série

Úloha 1.

Podle následujícího pravidla vytvoříme 42 součtů. $I-$tý součet vytvoříme tak, že sečteme prvních i členů. Ukázka: mám čísla na tabuli 1, 5, 8, 4. Vytvořím tak součty $s_1 = 1, s_2 = 6, s_3 = 14, s_4 = 18$.
Máme teda v našem případě vytvořených 42 součtů. Pokud je alespoň jeden součet dělitelný 42, máme vyhráno.
Pokud se tak nestane, máme 42 součtů, které dávají při dělení číslem 42 pouze 41 zbytkových tříd(1 - 41), nula být nemůže z předcházející podmínky, že žádný součet není dělitelný číslem 42.
Podle dirichletova principu mají aspoň 2 součty stejný zbytek po dělení 42. Když tyto 2 součty od sebe odečteme, vznikne nám součet několika čísel na tabuli a navíc bude tento součet dělitelný 42.

Kuba

Úloha 2.

Je třeba zjistit obsah $\triangle DEF$, který je totožný s obsahem $\triangle ABC$, označíme si ho tedy S_1.
Obsah shodných trojúhelníků $\triangle GHI$ a $\triangle JKL$ si označíme S_2. Jsme tak schopni sestrojit dvě rovnice popisující vztahy ze zadání.

$$\begin{aligned} 2S_1 + 2S_2 + 14 &= 5S_1 + 7 \\ 2S_1 + 2S_2 + 14 &= 5S_2 - 3 \end{aligned}$$

Dále řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých. S_1 můžeme vyjádřit jako $(2S_2 + 7)/3$. Tento výraz dosadíme do druhé z rovnic výše a po úpravě získáme $2S_2 = 13$. S_1 je tedy 11.
Jelikož známe obsah i výšku $\triangle DEF$, lze si snadno dopočítat délku strany tohoto trojúhelníku pomoci vzorce na výpočet obsahu trojúhelníku:

$$\begin{aligned} S &= (a \cdot V_a)/2 \\ 11 &= [a \cdot (2 \cdot a/11)]/2 \\ 121 &= a^2 \\ a &= 11 \end{aligned}$$

Zuzka

Úloha 3.

Víme, že střední příčky nám rozdělí trojúhelník na 4 menší trojúhelníky se stejným obsahem. Z toho, že trojúhelník $S_aS_bS_c$ má obsah $12\mathrm{cm}^2$, můžeme odvodit obsah trojúhelníku ABC jako čtyřnásobek malého, tedy $48\mathrm{cm}^2$.
Podíváme se na trojúhelníky AS_cT a BS_cT. V nich $|AS_c| = |BS_c|$ a zároveň je výška S_cT v obou stejně dlouhá (vzdálenost rovnoběžných úseček |strana, střední příčka|) a zároveň je rovna jedné třetině délky celé těžnice, to znamená, že výška spuštěná z T na stranu c je rovna třetině výšky z bodu C na stranu c. Proto musí být obsah trojúhelníku ATB roven 1/3 trojúhelníku ABC. Stejnou myšlenku aplikujeme na dvojce trojúhelníků (BS_aT, CS_aT) a (CS_bT, AS_bT).
Podle již zmíněné myšlenky mají trojúhelníky AS_cT, BS_aT a CS_bT stejný obsah roven 1/6 celkového obsahu trojúhelníka ABC. Každý z trojúhelníku AS_cT, BS_aT, CS_bT má $8\mathrm{cm}^2$.

Kuba

Úloha 4.

První se zaměříme na zmíněnou dělitelnost šesti. Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné třemi a dvěma zároveň. Aby číslo bylo dělitelné dvěma, jeho poslední číslice musí být sudá, a pokud má být dělitelné třemi, musí být součet všech číslic roven číslu dělitelnému třemi. Z toho se dá vyvodit, že první šestičíslí hádaného čísla musí být tvořeno jedině číslicemi 2,4,6 nebo 8. Pokud má platit, že z nich lze vytvořit libovolné trojčíslí dělitelné šesti, pak při hledání můžeme uvažovat, že pokud existuje kombinace číslic, pro kterou kritérium neplatí, můžeme přítomnost číslic v dané kombinaci vyřadit, protože alespoň jedno z nich se musí opakovat. Například 2 a 4 se v šestičíslí spolu nemůžou vyskytovat, protože 224 a 442 není dělitelné šesti. Stejným způsobem můžeme vyřadit i dvojice 2 a 6, 6 a 8 , 4 a 8, 4 a 6. Podmínce vyhovuje pouze kombinace číslic 2 a 8 nebo kombinace dvou stejných číslic (2 a 2, 4 a 4, 6 a 6, 8 a 8). Tady se dostáváme k druhé nápovědě – prvočíslo je pouze číslice 2 a zbývají nám tedy jen kombinace (2 a 2 nebo 2 a 8). Pokud se pak řídíme tím, že dvě stejné číslice nesmí být vedle sebe, vypadává i možnost pouze dvojek a zbývá pouze jediná možnost – střídání dvojky s osmičkou. Začneme dvojkou, aby s posledním dvojčíslím sousedila osmička. Zuzka si myslí číslo 28 282 821.

Ondra

Úloha 5.

Nezaokrouhlený průměrný počet bodů počítaný vzhledem k počtu odevzdaných prací označme a.
Nezaokrouhlený průměrný počet bodů počítaný vzhledem k počtu soutěžících označme b.
Víme, že $3,05 \leq a < 3,15$, a taky víme, že $2,35 \leq b < 2,45$.
Za úlohu bylo uděleno celkem $128 \cdot b$ bodů, odevzdalo ji $(128 \cdot b)/a$ soutěžících.
Můžeme si uvědomit, že podíl kladných čísel je co možná nejmenší, pokud je dělenec co nejmenší a dělitel co největší.
Podobně určíme i největší podíl. Pro počet odevzdaných úloh x platí:
$(128 \cdot 2,35)/3,15 < x < (128 \cdot 2,45)/3,05$
Je to tedy přibližně $95,49 < x < 102,82$.
Třetí úlohu odevzdalo 95 až 102 soutěžících.

Štěpán

Úloha 6.

Z možností prvních vybereme ty, které vyhovují rozmezí. V každém měsíci pak budeme mít 2 – 3 možná data, kromě února, kde je možné pouze jedno – 24. února.
Protože letos není přestupný rok, 29. února 2019 není reálné datum.
Odpověď pak je 24. února.

Ondra

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Michal	Maděřič	-	-	-	-	-	-	0	18

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Milan	Holotňák	2	6	5	8	1	6	28	164
2.	Natálie	Vylamová	9	4	7	8	1	6	35	160
3.	Alžběta	Sedláčková	-	-	-	-	-	-	0	62
4.	Alexandra	Seďová	-	-	-	-	-	-	0	45

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.-2.	Vilém	Bednařík	1	6	7	8	1	6	29	173
	Monika	Štábová	9	6	7	-	5	6	33	173
3.	Lukáš	Pohořelský	-	6	-	-	1	6	13	122
4.	Jana	Dreiseitlová	-	-	-	-	-	-	0	117
5.	Radim	Jeřábek	-	5	6	-	1	-	12	98
6.	Adam	Jemelka	-	-	-	-	-	6	6	83
7.	Linda	Tomišová	-	-	-	-	-	-	0	64
8.	Jakub	Feichtinger	-	-	-	-	-	-	0	61
9.	Aneta	Formánková	-	-	-	-	-	-	0	53
10.	Karolína	Biolková	-	-	-	-	-	-	0	51
11.	Alexandra	Obracajová	-	-	-	-	-	-	0	24
12.	Jakub	Macíček	-	-	-	-	-	-	0	12

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Hronová	9	6	7	8	2	6	38	181

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
2.	Adam	Kutálek	-	-	-	-	-	-	-	0	134
3.	Lída	Kačenková	-	-	-	-	-	-	-	0	50