KOKOS

32. ročník ⋆ 4. leták

Jarní soustředění

Milý řešiteli, abychom Ti ještě více přiblížili náš korespondenční seminář KoKoS a zároveň ocenili Tvou snahu, připravujeme pro Tebe (a samozřejmě i další řešitele) jarní soustředění! Můžeš se těšit na 4 dny nabité zajímavými přednáškami, hrami a spoustou zábavy. Témata přednášek budou z různých oblastí přírodních věd, na výběr budeš mít přednášky z matematiky, fyziky či astronomie. Čeká tě taky seznámení s programovatelnými roboty a magnetickou kapalinou.

Soustředění proběhne ve dnech 22. dubna – 26. dubna po velikonočních prázdninách. Již tradičně se koná v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

Cena, pro letošek stanovená na 500 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Pokud máš jakékoliv otázky, neváhej se obrátit na náš email *gmkkokos@seznam.cz*, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na *http://kokos.gmk.cz/soustredeni-prihlaska*. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

Organizátoři

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec ✉

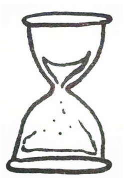
Zadání úloh

Terka se ocitla na palouku uprostřed lesa. Kolem rostly mohutné, temně zelené kapradiny, fialové cypřiše a monstery s jemným rubínovým vzorem. Obloha měla barvu té nejsytější tmavě modré, jakou si jen jde představit a i když se zdálo, že je den, zářily na ní hvězdy. Pomalu vykročila směrem z palouku. Procházela lesem, který byl plný nejrůznějších stromů. Byly vysoké a vznešené, tyčily se k nebi jako zelené věže, ale i přesto skrz jejich krásné větve pronikal dostatek světla pro pohodlnou chůzi. Ačkoliv neviděla žádné zvíře, z lesa se ozývalo švitoření a něco, co znělo jako pomalá, mírumilovná, téměř neslyšná hudba. Terka šla, kam ji vedl les, a během cesty se pod jejími chodidly pomalu začala vynořovat stezka. Proplétala se mezi keři a stromy až ji dovedla na malou mýtinu. Na stromech uprostřed mýtinky cosi upoutalo její pozornost. Jemné švitoření v korunách stromů. Přišla proto blíže a všimla si ohnivě zbarvených veverek proháněјících se ve větvích.

Úloha 1. (5 bodů): Terka pozorovala veverky na mýtině, kde rostly tři stromy: lípa, dub a javor. Veverky seděly v klidu na stromech, takže je mohla spočítat – bylo jich 34. Když přeskákalo 7 veverek z lípy na dub, bylo jich na dubu stejně jako na lípě a javoru dohromady. Poté ještě přeskákalo 5 veverek z javoru na dub, v tu chvíli bylo na javoru stejně veverek jako na lípě. Kolik veverek původně sedělo na každém ze stromů?

Terka by mohla sledovat veverky snad věčnost, ale její rozjímání přerušil jemný hlas: „Slečno! Haló, vy, slečno!“ Terka se otočila za zdrojem onoho hlasu. Ukázalo se, že patří mužíkovi, ne většímu než byla ona. Měl rozcuchané vlasy, podobné barvě veverek, velké a pronikavé zelené oči kryté hustým obočím. Vzhledem k jeho vzhledu a oděvu jasných barev, doplněnému o křiklavý klobouk, se nezdál kdoví jak důvěryhodný, ale stačil jeden pohled do těch velkých, upřímných, mírně rozpustilých ale především milých a vlídných očí a bylo hned jasné, že se není čeho bát. Pozdravil ji mírnou úklonou a smeknutím kloboučku. „Těší mě, ale ... kdo jste?“ ptala se Terka. „Jsem Zdejší,“ odpověděl neznámý. „Jistě, ale jak se jmenujete?“ vyzvídala dál. „No přeci Zdejší, ale odtud nejsem. Vy zde bydlíte? Máte to tady moc pěkné," na to mužík. „Ne, také odtud nejsem. Když nejste odtud, tak odkud?" zajímala se dál. „Z Údolí." „Jak jste se sem dostal? Je to daleko?" „Nedaleko. Na želvě jen pár minut a k tomu chvilka chůze." „Nechcete přijít na návštěvu?" „Jistě, moc ráda. Pojďme!" usmála se. Zdejší vedl Terku po cestičce, povídali si a smáli se. Prošli kolem potůčku a skály v podobě velké hlavy až došli k rozcestí, kde se zastavili. Zdejší se zamyslel a povídá:

Úloha 2. (5 bodů): „Půjdeme–li dál tímto pohodlným tempem 5 stokroků za otočení přesýpacích hodin, přijdeme na želví zastávku čtvrtinu otočení přesýpacích hodin po odjezdu naší želvy." Pak ukázal na skupinu, která je právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 8 stokroků za otočení přesýpacích hodin. Na želví zastávce budou již šestinu otočení přesýpacích hodin před odjezdem naší želvy."
Jak byla zastávka daleko od rozcestí?



„Zapeklitý problém jistě, ale má snadné řešení. Půjdeme pohodlným tempem a počkáme na další," prohlásila vesele Terka. „Výborně! Tak tedy tak," na to Zdejší. Vydali se na cestu. Po chvíli vyšli z lesa a kolem se rozprostřela rozlehlá louka. Létalo tam obrovské množství motýlů všech barev a velikostí. Tu se Zdejší otočí na Terku a zvesela se jí zeptá:

Úloha 3. (6 bodů): „Máme dvě dvojciferná čísla, která mají stejné číslice, pouze v opačném pořadí (např. 45 a 54). Součet těchto dvou čísel je 154 a jejich rozdíl 18. O jaké číslice se jedná?"

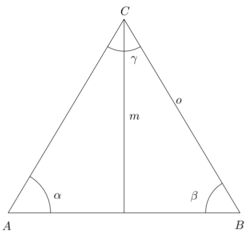
Terka okamžitě správně odpoví a ptá se, na co to Zdejší potřebuje vědět. Ten jen s širokým úsměvem prohlásí, že jen tak. V tu chvíli se před nimi objeví vrcholek Zelené budovy. Po chvíli je již vidět v celé své kráse. Zelený domeček vedle potoka obrostlý břečťanem tak, že téměř nejde rozeznat jeho původní barva. A vedle se na hladině líně pohupuje velká, ale mírumilovně vyhlížející želva. U morušového stromu hrají Ježek a Strojvedoucí pexeso.

Úloha 4. (9 bodů): Strojvedoucí a Ježek hrají pexeso s šesti kartičkami, ale oba mají špatnou paměť, takže pokaždé otáčí kartičky náhodně, navíc po dvou kolech zapomenou, že vůbec něco hráli a odejdou. Začíná hrát Strojvedoucí. Jak velkou má šanci na výhru Strojvedoucí a jak velkou Ježek?

Odešli, hráli a znovu přišli mnohokrát. Většinou vyhrál kupodivu Strojvedoucí, i když si to stejně nepamatoval. Vylezl na želvu a zvučným hlasem zvolal: „Nastupovat!" Na čas a zvesela vyrazili ze zastávky. Želva vypustila dlouhý vodotrysk a uháněla dolů po řece. Krajina kolem se prodlužovala a zkracovala. Projížděli kolem stromů – obrovských sekvojí, eukalyptů a akácií. Míjeli obrovské šarlatové opuncie a rozlehlé louky s nepřeberným množstvím květin od kopretin po zvonky. Terka byla unešená těmi barvami a začala usínat. Než stačila usnout, šťouchl ji Zdejší do ramene: „Ještě neusínej, jsme tady.“ Cedule hlásala: *Údolí – **KONEČNÁ STANICE.** Prosíme, vystupte.* Byli zase v lese, velice podobném tomu na začátku. Jediným rozdílem byl měsíc pohupující se na obzoru. Ve stínu starobylých dubů zde stál velký hodovní stůl. Byl plný jídla, všech druhů. Byly tam večeře, snídaně, sladké, kyselé i slané. Terka hlad neměla, a tak jí spíš zaujaly okolní police, krabice a stolky. Byly na nich klobouky a kravaty a také různé papíry, svitky a pergameny. Jakmile Zdejší uviděl její zájem, řekl: „Prosím, jako doma.“ A tak se rozhlédla po papírech na stolech a objevila dva, na kterých byly příklady. Na jednom prostá věta, zatímco na druhém celá řada matematických kreseb a nákresů.

Úloha 5. (8 bodů): Řešte rovnici $n! = m^2 + 2$ v celých nezáporných číslech.

Úloha 6. (7 bodů): Mějme rovnoramenný trojúhelník $\triangle ABC$. Délky stran m a n jsou dvě různá přirozená čísla, přičemž m je větší než n. Pokud obě čísla postupně sečteme, odečteme menší od většího, vynásobíme, vydělíme větší menším a získané výsledky sečteme dohromady, dostaneme číslo 196. Za pomoci vzorce $\sin\beta = (m/o)$ vypočtěte velikost úhlu γ.



Chvíli nad příklady přemýšlela a pak si řekla, že asi ví, jak by na ně vyzrála a přisedla ke stolu, kde se pustila do dýňového koláče. Po jídle seděli pod rozložitou lípou a poslouchali šumění lesa. Terka byla moc unavená a poslední co viděla, byl Zdejší hrající si s kloboukem a housenka, která seděla na velkém listě a spokojeně bafala z fajfky. Poté zavřela oči. Zdálo se to jen jako krátký okamžik. Pouze jako mrknutí. Ale jakmile je znovu otevřela, uviděla povlečení polštáře a za okny krásný východ slunce. Sešla potichu dolů po schodech, kde u stolu seděl Lukáš a snídal. „Dobré ráno. Co, že tak brzo? Nemohlas dospat? Snad ne zlé sny?“ „Právě naopak,“ řekla Terka s úsměvem natahujíc se po sklenici s medem.

*Řešení úloh 4. série posílejte do **14. 4. 2020** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.
V první bance by dostal 12% jednou za půl roku. Za jeden rok by měl na účtu: $(1000 \times 1,12) \times 1,12 = 1254,4$ Kč

V druhé bance by dostal 24% jednou za rok. Po jednom roce u této banky by měl: $1000 \times 1,24 = 1240$ Kč

Ve třetí bance by dostal měsíčně 1000 Kč, musel by jim ovšem pokaždé platit dvojnásobek toho, co minule. Na jak dlouho by byla taková smlouva výnosná?
Udělám si tabulku:
První měsíc 1000 Kč - odvod 1 Kč
Druhý měsíc 1000 Kč - odvod 2 Kč
Třetí měsíc 1000 Kč - odvod 4 Kč
$\vdots$
Devátý měsíc 1000 Kč - odvod 256 Kč
Desátý měsíc 1000 Kč- odvod 512 Kč
Jedenáctý měsíc 1000 Kč - odvod 1024 Kč
Jedenáctý měsíc muž začne prodělávat.

V první bance se muži bude částka zvyšovat více než ve druhé bance. Ve třetí bance by muž ze začátku vydělal hodně peněz, ale po několika měsících už by se mu to nevyplatilo. Z dlouhodobého hlediska se mu tedy nejvíce vyplatí první banka. A třetí banka by začala muže okrádat po deseti měsících.

Silva

Úloha 2.

Obsah rovnostranného trojúhelníka se stranou a je $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

Obsah čtverce se stranou b je b^2.

Obsah pravidelného šestiúhelníku se stranou c je $6\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$, což se rovná $\frac{3c^2\cdot\sqrt{3}}{2}$.
Při využití plošné jednotky platí:

$$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = b^2 = \frac{3c^2\cdot\sqrt{3}}{2} = 1$$

Potom $a \doteq 1,52$, $b = 1$, $c \doteq 0,62$.
Obvod tohoto trojúhelníka bude přibližně 4,56, obvod čtverce 4 a obvod šestiúhelníka zhruba 3,72.
Nejúspornější z těchto útvarů je šestiúhelník.

Martyčka

Úloha 3.

Celkový počet zápasů v turnaji je $5\cdot 6/2$ (každý tým hraje s pěti dalšimi, ve hře vždy dva týmy). V každém zápase se udělí 2 body (0, 2), nebo (1, 1). Počet všech bodů je $5\cdot 6 = 30$. Počet bodů, které bude mít každý tým na konci turnaje, je počet všech bodů dělený počtem všech týmů. $30/6 = 5$. Každý tým získal právě 5 bodů, to znamená, že musel alespoň jednou remízovat. Předpokládejme, že jednou prohrál. Pak také musel právě dvakrát vyhrát a ještě jednou navrch prohrát, aby byl počet bodů a zápasů roven 5. Níže je uveden jeden z možných průběhu zápasu.
Nejmenší počet remíz v turnaji byl 3.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	×	*Remíza*	*Výhra*	*Výhra*	*Prohra*	*Prohra*
B	*Remíza*	×	*Výhra*	*Výhra*	*Prohra*	*Prohra*
C	*Prohra*	*Prohra*	×	*Remíza*	*Výhra*	*Výhra*
D	*Prohra*	*Prohra*	*Remíza*	×	*Výhra*	*Výhra*
E	*Výhra*	*Výhra*	*Prohra*	*Prohra*	×	*Remíza*
F	*Výhra*	*Výhra*	*Prohra*	*Prohra*	*Remíza*	×

Kuba

Úloha 4.

Vypočítejme nejdřív, jakou část $\triangle ACD$ tvoří $\triangle EFD$. Víme, že vzorec pro obsah trojúhelníku je $S = (a \cdot v_a)/2$ a že přímky DE a DF rozdělují $\triangle ACD$ na tři další trojúhelníky. Musíme si uvědomit, že obsah těchto trojúhelníků je stejný, neboť všechny sdílejí jednu třetinu přímky AC a výšku spuštěnou z bodu D na přímku AC. Trojúhelník $\triangle EFD$ tedy tvoří třetinu obsahu $\triangle ACD$.

Nyní snadno zjistíme, jakou část čtyřúhelníku $ABCD$ zabírá $\triangle EFD$:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ACD} &= 3 \cdot S_{\triangle EFD} \\
S_{\triangle ABC} &= (S_{\triangle ACD})/2 \\
S_{ABCD} &= S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} \\
S_{ABCD} &= 3 \cdot S_{\triangle EFD} + 3 \cdot (S_{\triangle EFD})/2 \\
S_{ABCD} &= (9/2) \cdot S_{\triangle EFD} \\
S_{\triangle EFD} &= (2/9) \cdot S_{ABCD}
\end{aligned}$$

Jelikož $\triangle ACD$ je dvojnásobek $\triangle ABC$, stejně tak je $\triangle EFD$ dvojnásobek $\triangle EFB$. $\triangle EFB$ je tedy roven (1/9) z obsahu $ABCD$. Víme, že $S_{BDEF} = S_{\triangle EFD} + S_{\triangle EFB}$, čtyřúhelník $BEDF$ tedy tvoří (1/3) čtyřúhelníku $ABCD$.

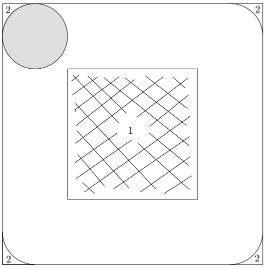
Zuzka

Úloha 5.

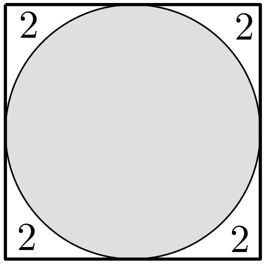
Protože prvočíselné číslo může končit číslicemi 2; 3; 5; 7 a 2. mocnina přirozeného čísla končí jen na číslice 0; 1; 4; 5; 6; 9. Hledaná prvočíselná čísla musí končit číslicí 5 stejně jako umocněná prvočísla. Jediným vyhovujícím prvočíslem je 5 (všechna další čísla končící pětkou jsou již dělitelná pěti, tzn. nejsou prvočísly). Druhá mocnina 5 je 25, což je prvočíselné číslo. Číslo 25 je jediné existující prvočíselné číslo, které je 2. mocninou prvočísla.

Danek

Úloha 6.
Nepřekrytou oblast si rozdělíme na dvě části. První vnitřní část – čtverec, druhou část – nepřekryté „rohy“ u vrcholů.
Nejprve vypočteme obsah vzniklého čtvrce $S_1 = (a-4)\cdot(a-4) = 36\text{cm}^2$ (původní délka strany se u něj zkrátila o 4 cm).
Pro obsah „rohů“ S_2 výjdeme z úvahy, že pokud bychom je „dali k sobě“, dostaneme následující obrazec):



Obr. 1: rozdělení



Obr. 2: rohy

Tedy čtvrec, kterému je vepsán kruh o poloměru $r = 1cm$. Obsah nepokryté plochy bude rozdíl obsahu vzniklého čtverečku a vepsaného kruhu:

$$\begin{aligned} S_2 &= S - S_k \\ S_2 &= (2r)^2 - \pi * r^2 \\ S_2 &= 2\cdot 2 - \pi \cdot 1 = 0,8584\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Obsah celé nepokryté části je pak $S = S_1 + S_2 = 36,8584\ \text{cm}^2$

Max

Zakousni se!

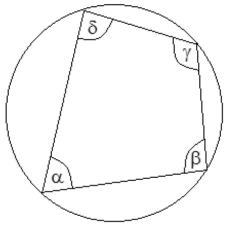
Tečnové a tětivové čtyřúhelníky

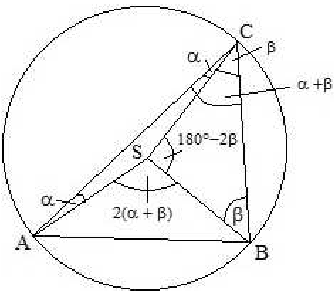
Co platí a proč?

V tomto dílu bychom vás rádi seznámili se dvěma speciálními čtyřúhelníky, a to čtyřúhelníkem tětivovým a čtyřúhelníkem tečnovým. V těchto čtyřúhelnících platí vztahy, které se dají velmi často využít při řešení geometrických úloh. My si tyto vztahy nejenže uvedeme, ale také dokážeme, že skutečně platí.

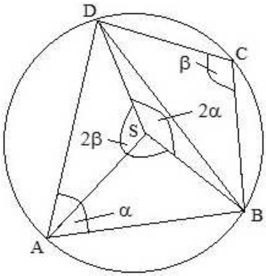
Tětivový čtyřúhelník

Tětivový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému se dá opsat kružnice.
Pro tětivový čtyřúhelník platí, že součet protějších vnitřních úhlů se rovná 180°.
Tento vztah můžeme zapsat jako $\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ}$.
K důkazu tohoto tvrzení je potřeba znát obvodové a středové úhly. Proto si nejprve ukážeme, co pro tyto úhly platí.



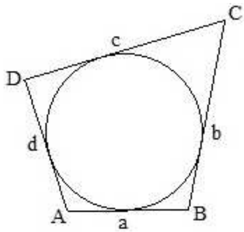


Jestliže jsou body A, B, C libovolné body kružnice se středem S, pak jsou poloměry AS a BS ramena středového úhlu ASB a polopřímky CA a CB ramena obvodového úhlu ACB. Platí, že velikost středového úhlu se rovná dvojnásobku velikosti úhlu obvodového.
V případě našeho obrázku tedy platí, že velikost úhlu ASB je dvojnásobkem velikosti úhlu ACB.
Platnost tohoto tvrzení si můžeme jednoduše dokázat. Trojúhelníky ASC a BSC jsou rovnoramenné (ramena jsou poloměry kružnice). Shodné úhly v trojúhelníku ASC označíme α, v trojúhelníku BCS jako β. Velikost úhlu ACB je proto rovna $\alpha + \beta$.
Lehce spočítáme, že velikost úhlu BSC se rovná $180^\circ - 2\beta$ a velikost úhlu ASC se rovná $180^\circ - 2\alpha$. Velikost úhlu ASB (středový úhel) můžeme vyjádřit jako $360^\circ - (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\alpha) = 2\beta + 2\alpha = 2(\alpha + \beta)$, což je dvojnásobek úhlu ACB (obvodový úhel).

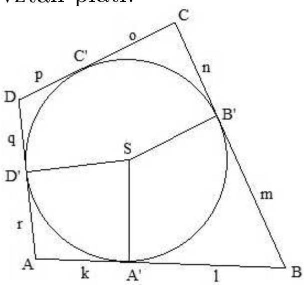


Nyní už si můžeme lehce ověřit, že vztah pro vnitřní úhly tětivového čtyřúhelníku opravdu platí.
Označme vnitřní úhel u vrcholu A jako α a úhel u vrcholu B jako β.
Jestliže má obvodový úhel BAD velikost α, pak má středový úhel BSD velikost 2α. Podobně má středový úhel BSD velikost 2β.
$2\alpha + 2\beta$ tvoří dohromady plný úhel, platí tedy, že $2\alpha + 2\beta = 360°$, $\alpha + \beta = 180°$.
Tím jsme dokázali, že součet protějších vnitřních úhlů se rovná 180°.
Analogicky bychom mohli dokázat, že vztah platí také pro druhou dvojici vnitřních úhlů.

Tečnový čtyřúhelník



Tečnový čtyřúhelník, je takový čtyřúhelník, jemuž se dá vepsat kružnice. Jinými slovy jsou strany tečnového čtyřúhelníku tečnami dané kružnice.
Pro tento čtyřúhelník platí, že součty velikostí jeho protějších stran se rovnají.
Pro čtyřúhelník na obrázku by tento vztah vypadal takto: $\boldsymbol{a + d = b + c}$. My si nyní ukážeme, proč tento vztah platí.



Střed kružnice označme S, body dotyku kružnice se stranami čtyřúhelníku po řadě jako A', B', C', D'.
Vzdálenosti sousedních bodů na stranách čtyřúhelníku označíme písmeny k až r.
Vztah, který chceme dokázat, si tedy můžeme přepsat do následujícího tvaru:
$\boldsymbol{k + l + p + o \ = m + n + q + r}$.
Podívejme se blíž na čtyřúhelník $A'BB'S$.
Oba trojúhelníky $A'BS$ a $BB'S$ jsou pravoúhlé, což vyplývá z vlastností tečny (je kolmá na průměr kružnice). Velikost úsečky $A'S$ je poloměrem kružnice, stejně jako úsečka SB'. Z toho plyne, že se velikosti těchto úseček rovnají. Úsečka SB je přeponou v obou trojúhelnících.
Strany $A'B$ a BB' jsou proto také shodné. Platí tedy $\boldsymbol{l = m}$.
Podobně bychom mohli odvodit, že úsek $\boldsymbol{n = o}$, $\boldsymbol{p = q}$, $\boldsymbol{r = k}$.
Z toho už přímo vyplývá rovnost $\boldsymbol{k + l + p + o \ = m + n + q + r}$.

Péťa, Katka

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Dominik	Müller	5	0	2	7	-	6	20	71
2.	Marie	Sabolová	5	-	5	7	-	7	24	57
3.	Matylda	Chvojková	-	-	-	-	-	-	0	2

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martina	Černá	5	6	5	7	9	4	36	98
2.	Matěj	Svoboda	5	2	5	7	2	7	28	86
3.	Josef	Kroček	-	-	-	-	-	-	0	28
4.	Alena	Knödlová	-	-	-	-	-	-	0	18
5.	Michal	Maděřič	-	-	-	-	-	-	0	4

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Pavla	Šimová	5	6	5	7	9	7	39	115
2.	Václav	Verner	3	6	5	7	9	7	37	102
3.	Matyáš	Burda	5	6	6	7	9	7	40	100
4.	Milan	Holotňák	5	0	5	7	9	7	33	98
5.	Linda	Tománková	1	2	6	7	9	6	31	91
6.	Jáchym	Vohradník	-	-	-	-	-	-	0	64
7.	Anna	Seligová	2	2	6	0	1	7	18	55
8.	Zuzana	Hauznerová	4	2	5	0	-	4	15	26
9.	Alexandra	Seďová	-	-	-	-	-	-	0	25
10.	Robert	Kubányi	4	0	5	0	1	5	15	15
11.	Jakub	Munzar	-	-	-	-	-	-	0	7

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jana	Dreiseitlová	5	2	5	7	9	7	35	66
2.	Ivana	Ludvíková	-	-	-	-	-	-	0	63
3.	Vojtěch	Jozek	-	-	-	-	-	-	0	57
4.	Adam	Jemelka	-	-	5	-	-	6	11	31
5.	Vilém	Bednařík	5	6	5	7	-	7	30	30