

# KOKOS

33. ročník      ★      2. leták

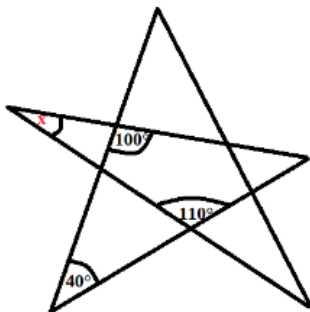
Zima je v plném proudu a v plném proudu se také vrací vaše oblíbená série KoKoSu.

## Zadání úloh

Inspektor Augustýn Lichý, policejní detektiv a zapálený matematik, se zhluboka nadechl mrazivě čerstvého horského vzduchu. Les kolem byl až na občasně ptačí zaštěbetání tichý a všechno halila tlustá sněhová pokrývka. Není nad ranní procházku, pomyslel si spokojeně. Všude klid a mír, to je dovolená, jak se patří! S takovými úvahami se inspektor vydal zpět k hotelu. Sníh mu vesele křupal pod nohama a cesta příjemně ubíhala. Netrvalo dlouho a stanul před horským hotelem Hvězda, kde se rozhodl strávit svou týdenní dovolenou. Volba to rozhodně nebyla špatná, neboť Hvězda patřila k vyhlášeným destinacím. Za zimními radovánkami sem už léta každoročně přijížděli ti nejnáročnější hosté z řad filmových hvězd, podnikatelů či politiků. I člověk, který hotel navštívil poprvé, ho bezpečně poznal podle slavného znaku pěticípé hvězdy na štítu budovy. Augustýna Lichého mnohem víc než prominentní hosté zajímala právě ona hvězda a její nepravidelný tvar. Jelikož měl hlavu matematika, okamžitě se mu v ní zrodil příklad.

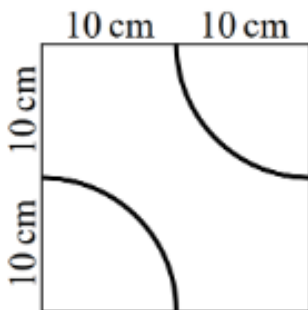


**Úloha 1. (5 bodů):** Jaká je velikost úhlu  $x$ ?



Spokojen s tím, jakou pěknou úlohu vymyslel, došel Lichý do svého pokoje. Převlékl se ke snídani, a protože dnes vyrazil ven opravdu časně a do otevření jídelny ještě zbýval nějaký čas, vytáhl si mapu a začal plánovat, kam se vydá na procházku následující den.

**Úloha 2. (6 bodů):** Lichého mapa měla tvar čtverce o straně 80 cm. Skladoval ji ale samozřejmě poskládanou, a to na čtverec o straně 20 cm. Rozložená mapa byla tedy přehyby pomyslně rozdělena na 16 čtverců s rozměry 20 x 20 cm a na každém takovémto čtverci byla vyznačena část turistické stezky ve tvaru dvou čtvrtkružnic (viz obrázek, je možná různá orientace). Urči, kolik měří (v cm) nejdelší trasa, kterou je možno na mapu pomocí čtvrtkružnic zakreslit. Trasa musí mít podobu souvislé křivky, čára tedy nesmí být přerušená ani lomená.



Když byl inspektor hotov s plánováním, ještě naposledy si uhladil knír a sešel dolů na snídani. Společnost v jídelně byla vskutku vybraná, u stolu vedle něj kupříkladu seděli postarší hrabě a hraběnka ze Schwänzelnbergu a významný podnikatel v automobilovém průmyslu Norbert Zajíc s rodinou. Ten našeho detektiva obzvláště zaujal svým impozantním knírem. Augustýn Lichý, sám majitel kníru velice slušného, dokázal každý pěkně narostlý kousek náležitě ocenit. Inspektor ještě nějakou chvíli Zajícův bujný vous zálibně

pozoroval, zatímco si podnikatel doléval do sklenice pomerančový džus. Chvilí po tom, co odvrátil zrak, se však stalo něco podivného. Zajíc upustil sklenici s džusem, chytil se za hrdlo a začal se dusit. Než kdokoliv z okolo sedících stačil něco udělat, Norbert Zajíc se zhroutil bezvládný na stůl. To už se kolem něj všichni seběhli. „Nedýchá!“ vykřikla jeho dcera. „Ustupte, jsem od policie!“ prodral se Lichý hloučkem k Zajícovi. Pokusil se nahmatat pulz, ale neúspěšně. S vážným výrazem se obrátil k vyděšeným lidem okolo. „Pan Zajíc je mrtev. Obávám se, že byl zavražděn.“

Následující hodiny byly směsicí zmatku, šoku a hrůzy. Tělo bylo odvezeno a dorazila policie spolu s inspektorovým věrným asistentem Kláskem. „Vidím, že se o dovolené nenudíte!“ zvolal Klásek místo pozdravu. „Proti troše nudy bych nic neměl,“ povzdechl si Lichý suše. „No ale když už jste tady, pusťme se do práce. Z okolností smrti se dá předpokládat, že skutečně jde o vraždu. O otravu, abych byl přesný. Ve sklenici oběti jsem zachytil slabý zápach arсенu. To samozřejmě ještě musí potvrdit laboratoř, ale jsem si téměř jistý.“ „Kdo mohl jed do sklenice dát?“ zeptal se Klásek. „Prakticky kdokoliv, kdo seděl s panem Zajícem u stolu. Tedy jeho syn Robert, dcera Albertina nebo hrabě či hraběnka Schwänzelnbergovi – ti ovšem nemají žádný zřejmý důvod pro vraždu.“ „Takže motivem je dědictví?“ „Pravděpodobně,“ odvětil detektiv. „Ale obsah závěti jsem ještě neměl příležitost zjistit, to bude váš úkol. Zatím se tu porozhlédnu, až budete hotov, vyhledejte mne.“ Inspektor měl pocit, že mu v tomto případě něco uniká. Nějaký drobný detail. . . Znovu prohlédl místo činu, stůl, celou jídelnu, všechno – i hotel z venku dokola obešel, ale žádný přehlédnutý důkaz nenalezl. Poněkud frustrovaný se vrátil dovnitř, kde už na něj čekal Klásek, hluboce zabraný do jakéhosi kousku papíru. Když k němu Lichý přistoupil, Klásek mu papír nadšeně strčil před oči. „Inspektore! Podívejte se, co jsem vymyslel! Víím, jaký jste nadšenec do matematiky, a musím říct, asi na mě máte v tomhle vliv. Jdu si takhle po chodbě, hledat vás, když v tom najednou bum, z čista jasna – příklad! Napadl mě úplně sám! Musel jsem si ho hned zapsat, abych vám ho mohl ukázat. Čtete!“ „Mám tři čísla. Když je navzájem vynásobím a přičtu k nim prostřední z nich, dostanu třetí mocninu prostředního čísla. Jaká tři čísla to jsou? ‘No, to je přece jednoduché, jakákoliv tři po sobě jdoucí přirozená čísla.“ „Chyba! Je to zcela určitě 8, 9 a –“ „Ale Klásku! To, co jste řekl, platí pro jakákoliv tři čísla, dokud jsou přirozená a následují po sobě. Dá se to ostatně jednoduše dokázat.“



**Úloha 3. (8 bodů):** Dokaž, že součin libovolných tří po sobě jdoucích přirozených čísel zvětšený o prostřední z nich se rovná třetí mocnině prostředního čísla.

„Radši si zkuste vypočítat nějaký pořádný příklad a s vymyšlením ještě nějakou dobu počkejte,“ poradil inspektor Kláskovi shovívavě. „Třeba tenhle. . .“

#### Úloha 4. (8 bodů):

Máme pravoúhlý trojúhelník  $ABC$ , který má pravý úhel u vrcholu  $C$ . Výška na stranu  $c$  je dlouhá 2,5 cm a těžnice na téže stranu má délku 3 cm. Jaký je obsah tohoto trojúhelníku?

„A teď byste mi snad mohl říct, jak je to s tou závětí,“ dodal Lichý, už trochu netrpělivě. „Ano. Samozřejmě. Takže v závěti stojí –“ začal Klásek, větu však nedokončil. Vešel totiž cizí muž a zamířil přímo k nim. „Zdravím vás, pánové, vy budete jistě od policie. Mé jméno je Hubert Zajíc, jsem nejstarším synem zesnulého pana Zajíce. Přijel jsem hned, co jsem se doslechl tu strašnou zprávu,“ odmlčel se, zřejmě přemožen city. „Věřím vám, pánové, že najdete zlosyna, který otrávil ten džbán s džusem. Nemůže zůstat nepotrestán. Rád bych teď šel za svými sourozenci, byli byste tak laskavi a řekli mi, kde je najdu? Samozřejmě jsem vám k dispozici, kdybyste cokoliv potřebovali.“ Zatímco Klásek vysvětloval, kudy se dostat do apartmá Zajícových, inspektora Lichého přepadl podivný pocit. Ten poslední detail, poslední dílek skládačky měl na dosah, cítil to. Jen natáhnout ruku... Když Zajíc odešel, obrátil se na Kláska: „Ta závěť?“ „Jistě. V podstatě je to velmi jednoduché, všechny peníze se rozdělí mezi sourozence Zajícovy. Je tu ale jeden malý háček...“

**Úloha 5. (7 bodů):** Norbert Zajíc se rozhodl, že odkáže celý svůj peněžitý majetek svým dětem. Všechny peníze rozdělil v poměru 1 : 2 a tu menší část určil svému prvorozenému synovi. Zbytek znovu rozdělil v poměru 1 : 2 a opět tu menší část určil svému druhorozenému synovi. Takhle pokračoval, dokud nepodělil všechny své syny celočíselnými sumami. Dcera poté dostala zbytek peněz. Kolik měl podnikatel Zajíc synů, peněz a kolik z nich zdědila jeho dcera? Víš, že Robert, prostřední syn, si přišel na 78 000 Kč.

„Hm. To by souhlasilo...“ zamumlal si pro sebe Lichý. „Ještě tady mám pro vás něco: zpráva z laboratoře, před chvílí ji doručili,“ podal Klásek inspektorovi obálku. Ten ji hned otevřel a začel se do textu uvnitř. Když byl hotov, vzhlédl. „Klášku, shromážděte všechny v jídelně. Už vím, kdo je vrah.“

Sešli se všichni – Hubert, Robert a Albertina Zajícovi, i přátelé pana Zajíce Schwänzelbergovi. Jejich zvědavé obličeje se upíraly na Augustýna Lichého. „Dámy a pánové,“ začal, „jistě vás potěší, že totožnost vraha již není neznámá.“ „Víme, že nás podezříváte,“ řekl Robert Zajíc, „ale ubezpečuji vás, že nikdo z nás, kdo jsme seděli u toho stolu, mého otce neotrávil. Prosím vás tedy, abyste nevznášel žádná nerozvázná obvinění.“ „Všechna obvinění, která jsem kdy vznesl, byla založena výhradně na umění logické dedukce a rozhodně nebyla nerozvázná, v tom vás zase ubezpečuji já, pane Zající. Ale můžete být klidný, přestože na začátku tomu všechno nasvědčovalo, teď už opravdu věřím, že vrahem nebyl nikdo sedící u toho stolu.“ Augustýn Lichý se potutelně usmál. „Vrahem byl totiž někdo, do koho byste to vůbec neřekli. Vlastně to byl někdo, koho jste si nejspíš ani nevšimli. Ale já si všímám. Dámy a pánové, vrahem byl číšník.“ Ozvalo se kolektivní zalapání po dechu. „Jak je to možné? Proč by to dělal? To je nesmysl!“ „Není to nesmysl, naopak, je to geniální. Nikdo z vás se při snídani nezajímal o to, co dělal číšník. Nikdo kromě mě ani nezaznamenal, že tam je. Mohl si dělat, co chtěl, nikým nezpozorován, a

stejně tak se i vytrátit. Jenže nepočítal se mnou. Toto, vážení, je zpráva z laboratoře, která otestovala pomerančový džus ze džbánu a dvou sklenic – té patřící zesnulému a vaší, pane Zajíci. Nikdo jiný toho rána džus nepil. A došli jsme k opravdu zajímavému zjištění. Arsenik, použitý jed, se totiž nacházel jak ve sklenici pana Zajíce staršího, tak ve džbánu. Nikoliv ovšem ve sklenici pana Roberta. Navíc se lišila koncentrace džusu, ten otrávený ji měl o něco nižší. Co se tedy nespíš událo: Na stůl se vám dostal džbán s úplně obyčejným, nezávadným džusem. Z toho jste si vy, pane Zajíci, i váš otec nalili sklenici. Číšník si počkal na vhodnou chvíli, kdy jste vy měl sklenici pořád plnou, ale váš otec už skoro dopito, a pod záminkou doplnění džbánu do něj nalil obarvenou vodu s jedem. Panu Norbertu Zajíci pak už jen stačilo nalít si novou sklenici a jeho osud byl zpečetěn. Číšník mezitím prostě odešel.“

### Úloha 6. (6 bodů):

Ve džbánu je 0,5 l džusu o koncentraci 15%. Kolik je třeba dolít vody, aby vznikl 10% džus?

„Ale proč by to ten číšník vůbec dělal? Co mohl mít proti Norbertovi, aby provedl něco tak strašného?“ zeptal se hrabě Schwänzelnberg, očividně v šoku. „Možná to nakonec nebyl číšník, ne tak docela.“ Inspektor si vychutnával zmatené pohledy všech přítomných. „Vrah se za číšníka pouze vydával,“ upřesnil. „A kdo to tedy byl?“ chtěla vědět slečna Albertina. „Někdo, kdo by na smrti pana Zajíce hodně vydělal. Řekněme jeho syn. Vy, pane Huberte,“ obrátil se na něj Lichý. „Nesmysl! Vy jste se musel dočista pomátnout! Kde máte důkaz?“ vykřikl obviněný. „Kromě toho, že výškou a postavou odpovídáte číšníkovi, kterého jsem ráno viděl u stolu vaší rodiny, a že navíc nejspíš nemáte žádné alibi? No, tak třeba to, že jste mi dnes přál, abych našel, cituji: 'zlosyna, který otrávil ten džbán s džusem'. Džbán, zdůrazňuji. Přestože tou dobou ještě nikdo nevěděl, že jed byl také ve džbánu. Pokud jste ho tam tedy nedal vy sám...“ „Vy...“ zavrčel Hubert Zajíc. Než mu Klásek stačil nasadit pouta, vysmekl se a rozběhl se pryč. Klásek se okamžitě vyřítil za ním a inspektor je, v podstatně pozvolnějším tempu, následoval. Místo aby však zamířil k hlavním dveřím jako prchající zločinec, vydal se Lichý k zadnímu východu. Ze dveří vyšel tak akorát včas na to, aby byl svědkem toho, jak Zajícovi podjely nohy na zledovatělém povrchu, svalil se a doklouzal přímo k inspektorovým nohám. Ten vytáhl z kapsy vlastní pár železice, a když je měl Zajíc bezpečně nasazené, nevzrušeně poznámal: „To jste nevolil dobrou cestu příteli. Je tu dost ledu, víte? Sám jsem se tu před pár dny pěkně sklouzl.“ Přesně v ten moment se za rohem vynořil Klásek. Pokusil se zastavit, ale bylo pozdě. I on se vzápětí složil inspektorovi k nohám. „Musím vám dát za pravdu, Klásku,“ prohodil Lichý. „O dovolené se rozhodně nenudím!“

*Řešení úloh 2. série pošlete do 15.3. 2023 na známou adresu:*

KoKoS

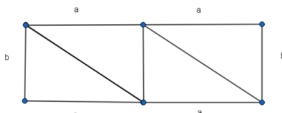
Gymnázium Mikuláše Koperníka

gmkkokos@seznam.cz

## Autorská řešení 1. série

### Úloha 1.

Různým zkoušením jsme přišli na to, že tyto 4 shodné trojúhelníky musejí být pravoúhlé a obdélníky vypadají takto:

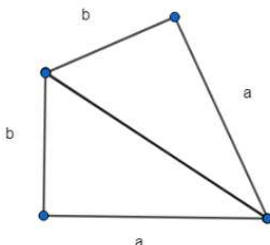


Označíme si strany trojúhelníku jako  $a$ ,  $b$  a  $c$ :

Známe obvod tohoto obdélníku a umíme si ho pomocí stran trojúhelníku vyjádřit:

$$4 * a + 2 * b = 116 \text{ cm}$$

Když teď víme, že tyto čtyři trojúhelníky jsou pravoúhlé, dokážeme ze 2 z nich sestavit deltoid:



A protože známe i obvod tohoto deltoidu, dokážeme si ho také vyjádřit pomocí rovnice:

$$2 * a + 2 * b = 68 \text{ cm}$$

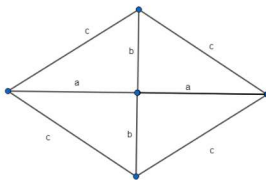
Teď si jen jednoduše vyřešíme soustavu rovnic:

$$4 * a + 2 * b = 116 \text{ cm}$$

$$2 * a + 2 * b = 68 \text{ cm}$$

$$a = 24 \text{ cm}; b = 10 \text{ cm}$$

Dále si načrtne, jak sestavit kosočtverec ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků a pojmenujeme strany, jako předtím:



Zjistili jsme, že pro výpočet obvodu budeme potřebovat velikost třetí strany  $c$ . Tu získáme jednoduše pomocí pythagorovy věty:

$$\sqrt{24^2 + 10^2} = c$$

$$c = 26 \text{ cm}$$

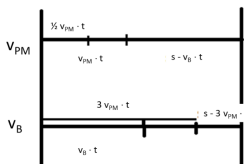
Obvod kosočtverce už jen jednoduše dopočítáme:

$$4 * c = 4 * 26 = 104 \text{ cm}$$

*Matěj*

## Úloha 2.

Potřebujeme si srovnat rychlost Petra s Mírou ( $v_{PM}$ ) a rychlost Boubínových ( $v_B$ ), abychom zjistili, kdo jel rychleji.



Pokusíme si obě rychlosti vyjádřit pomocí rovnic. Vzdálenost trasy ( $s$ ) je pro oba dva stejná a daný čas ( $t$ ) také. Prvně si vyjádříme Petra s Mírou: to, jak reálně jel si můžeme vyjádřit jako  $v_{PM} \cdot t$  (viz obrázek). Ze zadání můžeme vyčíst, že:  $3 \cdot (s - v_{PM} \cdot t) = s - 1/2 v_{PM} \cdot t$

Rovnici upravíme a vyjádříme si rychlost, která nás zajímá:

$$v_{PM} = 4s/5t$$

Dále si vyjádříme Boubínovy:

$$s - v_B = 2.(s - 3.v_B.t)$$

Rovnici opět upravíme:

$$v_B = s/5t$$

Nakonec obě dvě rychlosti porovnáme a můžeme vidět, že Petr s Mínou za stejný čas ujeli čtyřikrát větší vzdálenost, proto můžeme říct, že Petr s Mínou jeli v červeném autě a Boubínovi v modrém autě.

*Helča*

### Úloha 3.

Hledaná čísla jsou 8, 12, 5 a 20.

*Eliška*

### Úloha 4.

a)

Nejdříve musíme vypočítat kolik peněz z 50000 si Mína nechala:  $6000 + 50000 - 20000 = 36000$

Poté si můžeme dosadit do trojčlenky, ze které zjistíme výsledné procenta.

36000... $x$

50000...100%

$$\frac{36000 \dots x}{50000 \dots 100\%} \quad x = 36000 * 100 / 50000 = 72\%$$

Mína si nechala 72%.

b)

Víme, že Mína Jasenskému vrátila pouze 14000(50000 - 36000), což je 10% ze všech půjčených peněz. Opět dosadíme do trojčlenky. 14000...10%

$x \dots 100\%$



$$x = 14000 * 100/10 = 140000$$

Bedřich Jasenský půjčil Míně celkem 140000 Kč.

*Eliška*

### Úloha 5.

Výroky na 1. a 3. obálce tvrdí opak, takže jeden z nich musí být pravdivý. Proto na zbylé 2. obálce musí být určitě nepravdivý výrok. Jméno vraha je tedy je tedy ve 2. obálce.

Dá se to řešit i jinak. Kdyby bylo jméno vraha v 1. obálce, měli bychom dva pravdivé výroky (na 1. a 2. obálce), což je v rozporu s danými podmínkami. Kdyby bylo jméno vraha ve 3. obálce, zase bychom měli dva pravdivé výroky (tentokrát na 3. a na 2. obálce). Takže jméno vraha musí být ve 2. obálce.

*Peťa*

### Úloha 6.

$$VI + IV = X$$

*Eliška*

## Výsledkové listiny

### 6. ročník

|    | <i>jméno</i> | <i>příjmení</i> | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>S</i> | $\Sigma$ |
|----|--------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. | Barbora      | Bordovská       | 8        | 6        | 6        | 7        | 5        | 8        | 40       | 40       |
| 2. | Mikuláš      | Vaňas           | 8        | 6        | 6        | 6        | 5        | 8        | 39       | 39       |
| 3. | Matyáš       | Pleva           | 6        | 6        | 6        | 7        | 5        | 8        | 38       | 38       |
| 4. | Marek        | Životský        | -        | -        | 6        | 0        | 5        | 5        | 16       | 16       |
| 5. | Jan Václav   | Bureš           | 0        | 0        | 6        | 1        | 0        | 8        | 15       | 15       |
| 6. | Pavel        | Wildumetz       | 0        | -        | 0        | 7        | 0        | 8        | 15       | 15       |
| 7. | Tran Duc     | Trung           | -        | -        | -        | -        | -        | 8        | 8        | 8        |

### 7. ročník

*jméno*   *příjmení*   *1* *2* *3* *4* *5* *6* *S*    $\Sigma$

### 8. ročník

|    | <i>jméno</i> | <i>příjmení</i> | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>S</i> | $\Sigma$ |
|----|--------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. | Karolína     | Tichá           | 8        | 6        | 6        | 7        | 5        | 8        | 40       | 40       |

### 9. ročník

*jméno*   *příjmení*   *1* *2* *3* *4* *5* *6* *S*    $\Sigma$